现代数学译丛

实流形和复流形上的分析

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著



科学出版社

现代数学译丛

实流形和复流形上的分析

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

陆柱家 译

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书论述了近代微分拓扑、微分几何、大范围分析和多复变函数论的一些共同的基本定理(包括同类书中不易见到的深刻而有用的一些定理)，并叙述了流形上的微分算子理论.

本书简明扼要，清晰易懂，是一本优秀的涉及多学科的基本理论书籍，可供数学系高年级学生、研究生、大学教师及数学工作者参考.

R. Narasimhan
ANALYSIS ON REAL AND COMPLEX MANIFOLDS
North-Holland, Inc.
Second edition 1973

现 代 数 学 译 丛
实流形和复流形上的分析
〔美〕R. 纳拉西姆汉 著
陆柱家 译
责任编辑 张启男
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1986年4月第一版　开本：850×1168 1/32
1986年4月第一次印刷　印张：7 7/8
印数：0001—4,700　字数：207,000

统一书号：13031·3159
本社书号：4757·13—1

定价：2.25 元

序　　言

本书来源于1964/65年冬天在孟买 Tata 基本理论研究所所作的演讲. 讲演的目的是介绍实流形上和复流形上分析中的各种课题. 不用说，课题的实际选择完全由个人兴趣所确定. 讲演内容曾由 Tata 研究所作为讲义笔记而刊行，现在这本书就是以此笔记为基础而写成的.

本书的对象是对分析感兴趣但分析知识不多的读者. 我们假定他们具有实变函数论(微积分和测度论)和某些复变函数论的知识. 一般说来，本书用到的多复变函数的一些基本性质将被明确地叙述，并附有参考文献. 然而，我们假定读者熟知线性代数和多重线性代数(向量空间的对偶，张量积，外积等等的性质)以及集合拓扑(连通的和局部紧空间的性质).(所需的素材包含在 Bourbaki: *Algébre Lineaire*, *Algébre Multilinéaire* 和 *Topologie Générale*, 第 I 章和第 II 章中.)

本书共分三章. 第一章讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可微函数的性质，其目的是提出在微分拓扑中经常用到的可微函数的某些定理（诸如隐函数定理，Sard 定理和 Whitney 逼近定理)，并且给出了它们的完全的证明.

第二章是作为研究实流形和复流形的一个导论. 除去通常的一些定义(微分形式和向量场)外，这一章包含了 Frobenius 定理，Poincaré 引理，Grothendieck 引理，Grothendieck 引理对于复分析的应用，Whitney 的嵌入定理以及 Thom 横截性定理.

最后一章讨论线性椭圆微分算子的性质. 给出了属于 Peetre 和 Hörmander 所刻划的线性微分算子的特征. 证明了关于椭圆算子的 Gårding 不等式和 Friedrichs 不等式，并将其用来证明椭圆方程的弱解的正则性. 这一章以 Malgrange-Lax 的逼近定理及

其对于证明关于开 Riemann 曲面的 Runge 定理的应用（属于 Behnke 和 Stein）为其结尾.

我们不讨论 Riemann 度量和初等微分几何，也不讨论椭圆线丛，尽管它们是重要的，而且是有意义的. 事实上，把这些定理，如第三章的有限性定理，推广到这样的线丛并不是很困难的.

我感谢在准备本书过程中所得到的多种帮助. 感谢 M. Narlikar 夫人整理了 Tata 研究所刊行的讲义笔记；我特别感谢 H. G. Diamond 非常仔细地阅读了大部分的讲义笔记，指出了一些错误，并且提出了改进意见和一些不同的证明. 最后，感谢 N. H. Kuiper 建议将 Tata 研究所刊行笔记改写为本书，他对第一章和第二章有益的注记，以及他对原稿付印方面的帮助.

R. 纳拉西姆汉

1968 年 7 月 于日内瓦

目　录

第一章　$\boldsymbol{R}^n$ 中的可微函数

记号　我们将使用下面的一些记号：$\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z}$ 分别表示实数域，复数域，有理数域和整数环．我们将前两个数域视为具有它们通常的拓扑．$\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{C}^n, \cdots$ 将分别表示 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \cdots$的 Descartes 积，例如，

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_j \in \boldsymbol{R}, j = 1, \cdots, n\}.$$

记号 $\boldsymbol{R}^+, \boldsymbol{Q}^+, \boldsymbol{Z}^+$ 分别表示 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}$ 的非负元素的集合．

对于大部分情形，α, β 表示非负整数的 n 数组：$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，$\alpha_j, \beta_j \in \boldsymbol{Z}^+$．此时，我们令

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,\ \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},\ \text{如果}\ \beta_j \leqslant \alpha_j.$$

如果 $\beta_j \leqslant \alpha_j$，则我们记为 $\beta \leqslant \alpha$；如果 $\beta \leqslant \alpha$，并且 $\beta \neq \alpha$，则记为 $\beta < \alpha$．

我们用 $x = (x_1, \cdots, x_n)[z = (z_1, \cdots, z_n)]$ 表示 $\boldsymbol{R}^n[\boldsymbol{C}^n]$ 的点，则

$$|x| = \max_j |x_j|,\ |z| = \max_j |z_j|,$$

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|z\| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

当 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，并且 S 是 X 的一个子集时，我们用 $\mathring{S}$ 表示 S 的内点集合，即包含在 S 中的最大开集．当 S_1, S_2 是 X 的两个子集时，若 S_1 在 S_2 中是相对紧的，即：若 S_1 在 S_2 中的闭包是紧集时，我们记作 $S_1 \Subset S_2$．

当 f 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一开集 Ω 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的一个映射，并且 λ 是 Ω

中的一个非负函数时，我们记

$$f(x)=O(\lambda(x)),\ [\text{或者 } f=O(\lambda)],$$

如果存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $x\in\Omega$，有 $|f(x)|\leqslant C\lambda(x)$。此外，当 $a\in\Omega$ 时，我们记

$$f(x)=o(\lambda(x)),\ \text{当 } x\to a \text{ 时(或当 } |x-a|\to 0 \text{ 时)},$$

如果存在一个映射 $\varepsilon:\Omega\to\boldsymbol{R}^+$，使得当 $x\to a$ 时 $\varepsilon(x)\to 0$，并且 $|f(x)|\leqslant\varepsilon(x)\lambda(x)$。

当用"无穷远点"代替 a 时，也用类似的记号。

§1.1. Taylor 公式

令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，k 是一个 $\geqslant 0$ 的整数。我们用 $C^k(\Omega)$ 表示 Ω 上具有阶数 $\leqslant k$ 的连续偏导数的实值函数 f 的集合。也就是说，当 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant k$ 时，这些函数 f 的偏导数

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

在 Ω 上存在并连续。我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示对于所有 $k\geqslant 0$，属于所有 $C^k(\Omega)$ 的函数的集合。$C^k(\Omega)$ 中的函数称为 Ω 上的 C^k 函数。对于 $f\in C^k(\Omega)$ 和 $|\alpha|\leqslant k$，我们用

$$D^\alpha f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}f$$

表示偏导数

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

其中，所施行的各个微商的次序是无关紧要的。对于定义在 Ω 上的任何函数 f（不必是连续的），我们用 supp(f) 表示集合

$$\{x\in\Omega\,|\,f(x)\neq 0\}$$

在 Ω 中的闭包。supp(f)称为 f 的**支集**。$C_0^k(\Omega)$[1] 表示使得 supp(f) 是紧集的函数 $f\in C^k(\Omega)$ 的集合。

1) 原文误为 $C_0^\infty(\Omega)$。——译者注

如果 E 是一个有限维 $\boldsymbol{R}$ 向量空间，我们用 $C^k(\Omega, E)$, $C_0^k(\Omega, E)$, $\cdots$ 表示所有映射 $f: \Omega \to E$ 的集合，对于 E 上任意的(连续)线性泛函 l，这些函数 f 使得函数 $l \circ f \in C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$, $\cdots$.

如果 $e_1, \cdots, e_q$ 是 E 的一个 $\boldsymbol{R}$ 基，$f: \Omega \to E$ 是一个映射，则对于每个 $x \in \Omega$，存在 q 个实数 $f_1(x), \cdots, f_q(x)$，使得

$$f(x) = \sum_{j=1}^{q} f_j(x) e_j.$$

容易验证，

$$f \in C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \cdots$$

当且仅当

$$f_j \in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \cdots, j = 1, \cdots, q.$$

$C^k(\Omega, E)$ 的元素称为从 Ω 到 E 中的 C^k 映射. 当 $E = \boldsymbol{R}^q$ 时，我们把 $C^k(\Omega, E)$, $C_0^k(\Omega, E)$, $\cdots$ 记作 $C^k(\Omega, q)$, $C_0^k(\Omega, q)$, $\cdots$. 对于 $f \in C^k(\Omega, E)$，我们可以定义导数 $D^\alpha f(|\alpha| \leqslant k)$. 此时

$$D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega, E).$$

我们将把 $f \in C_0^k(\Omega)$ 等同于在 Ω 上 $=f$，在 $\boldsymbol{R}^n - \Omega$ 上 $=0$ 的元素 $g \in C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$.

我们还将经常考虑 Ω 上的复值函数(或从 Ω 到 $\boldsymbol{C}^q$ 中的映射). 此时，如果不发生混淆，我们将用记号 $C^k(\Omega)$, $C^k(\Omega, q)$, $\cdots$ 代替 $C^k(\Omega, \boldsymbol{C})$, $C^k(\Omega, \boldsymbol{C}^q)$, $\cdots$.

定义在 Ω 上的一个实值函数 f 称为(实)**解析的**，如果对于任何 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$，存在一个幂级数

$$P_a(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha (x - a)^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha_j \geqslant 0} c_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

当 x 在 a 的一个邻域 U 中时，它收敛于 $f(x)$. 此时，在 U 的紧子集上，此级数一致收敛于 f (因此 f 是连续的)，并且逐项微分得到的级数也一致收敛. 因而 $f \in C^\infty(\Omega)$，并且，对于任意 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，有

$$D^\beta f(x) = D^\beta P_a(x) = \sum_\alpha c_\alpha D^\beta (x-a)^\alpha.$$

再者，此级数是由 f 唯一确定的；事实上，

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

以上述的方法同样可以定义从 Ω 到一个有限维向量空间中的解析映射.

当 U, V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集、$f:U\to V$ 是一个使得 f 和 f^{-1} 都是 C^k 映射的同胚时，我们说 f 是从 U 到 V 上的一个 C^k 微分同胚（或者就称为微分同胚）. 如果 $U=V$，我们称 f 为一个 C^k 自同构.

如果 f 和 f^{-1} 是实解析的，我们就说 f 是一个解析同构（或者，解析自同构，若 $U=V$）.

当 U 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个开集，f 是 U 上的一个复值函数时，f 称为全纯的，如果对于任意 $a\in U$，存在一个幂级数 $\Sigma c_\alpha(z-a)^\alpha$，对于 a 的一个邻域中的所有的 z，此幂级数收敛于 $f(z)$.

当 E 是一个有限维 $\boldsymbol{C}$ 向量空间时，一个映射 $f:U\to E$ 称为是全纯的，如果对于 E 上任意的 $\boldsymbol{C}$ 线性泛函 l, $l\circ f$ 是全纯的. 当我们把一个映射 $f:U\to\boldsymbol{C}^q$ 记作 $f=(f_1,\cdots,f_q)$ 时[1]，f 是全纯的，当且仅当每个 f_i 是一个全纯函数.

一个映射 $f:U\to V$（$\boldsymbol{C}^n$ 中的开集）称为一个 $\boldsymbol{C}$ 解析同构（或者，稍微粗糙一些，称为解析同构，如果不会发生混淆的话），如果 f 和 f^{-1} 都是全纯的. Osgood 的一个定理（例如，参阅 Hervé[1963]）——在本书中我们不证明它——断言，从 U 到 V 上的一个一对一的全纯映射是一个 $\boldsymbol{C}$ 解析同构. 对于 C^k 或实解析映射，没有类似的定理.

我们将假定全纯函数的某些基本性质是熟知的. 这些性质在大多数有关多复变函数论的书中都有证明，例如，可参阅 Hervé [1963] 以及 Hörmander [1966].

---

1) 原文把 $f:U\to\boldsymbol{C}^q$ 误为 $f:\Omega\to\boldsymbol{C}^q$.——译者注

1.1.1 Cauchy-Riemann 方程 定义在一个开集 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ 上的函数 f 是全纯的，当且仅当它是连续的，并且，对于任何 j, $1 \leqslant j \leqslant n$，偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

存在并为 0 . 这里 $z_j = x_j + iy_j$, x_j, y_j 是实的，$i = \sqrt{-1}$.

我们还令

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

对于 U 上的**全纯函数** f, 我们记

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

根据方程 1.1.1，我们有

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

Hartogs 的一个基本的定理(参阅 Hörmander [1966]) 断言，连续性条件在 Cauchy-Riemann 方程 1.1.1 中是多余的; 这里我们不证明这个定理.

1.1.2 解析开拓原理 如果 f 在 $\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{R}^n)$ 的一个连通开集 $U(\Omega)$ 中是全纯的(实解析的)，并且，对于所有的 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和某个 $a \in U(\Omega)$, $D^\alpha f(a) = 0$, 则 $f \equiv 0$. 特别，如果 f 在 $U(\Omega)$ 的一个非空开子集上为零，则 $f \equiv 0$.

1.1.3 Weierstrass 定理 如果 $\{f_\nu\}$ 是一列全纯函数，在 U 的任何紧子集上它一致收敛于函数 f, 则 f 在 U 中是全纯的. 并且，对于任何 α, 在 U 的紧子集上 $\{D^\alpha f_\nu\}$ 一致收敛于 $D^\alpha f$.

1.1.3′ Montel 定理 如果 $\mathfrak{S} = \{f\}$ 是 U 中的一族全纯函数，在 U 的任何紧子集 K 上它们是一致有界的:

$$|f(x)| \leqslant M \quad 对于所有\ x \in K,\ f \in \mathfrak{S},$$

那么 $\mathfrak{S}$ 的元素的任何一个序列包含一个子序列，在 U 的任何紧子集上此子序列一致收敛.

1.1.3″ 极大模原理 令 f 在 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个连通开集 U 中是全纯的。则映射 $f:U\to\boldsymbol{C}$ 或者是常数，或者是开的。特别，如果 U 是有界的，并且我们令

$$M=\sup_{\zeta\in\partial U}\ \overline{\lim_{z\to\zeta,z\in U}}|f(z)|,$$

则对于所有 $z\in U$，我们有 $|f(z)|<M$，除非 f 是常数。

1.1.4 Cauchy 不等式 如果 f 在 U 中是全纯的，并且对于 $z\in U$，有 $|f(z)|\leqslant M$，则对于任何紧集 $K\subset U$ 和任何 α，我们有

$$|D^\alpha f(z)|\leqslant M\alpha!\delta^{-|\alpha|}\quad 对于\quad z\in K,$$

其中 δ 是 K 到 U 的边界的距离。

1.1.5 引理 令 f 在 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 中是实解析的。我们把 $\boldsymbol{R}^n$ 看作 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个闭子集。则存在一个开集 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 和 U 中的一个全纯函数 F，使得 $U\cap\boldsymbol{R}^n=\Omega$ 和 $F|\Omega=f$。

证明 令 $a\in\Omega$，并令 $P_a(x)=\Sigma c_\alpha(x-a)^\alpha$ 是一个在 $|x-a|<r_a(r_a>0)$ 中收敛于 $f(x)$ 的幂级数。定义

$$U_a=\{z\in\boldsymbol{C}^n||z-a|<r_a\}.$$

则对于 $z\in U_a$，$P_a(z)=\Sigma c_\alpha(z-a)^\alpha$ 收敛，因而它是 U_a 上的一个全纯函数。

令 $U=\bigcup_{a\in\Omega}U_a$。我们断言，如果 $U_a\cap U_b=U_{a,b}\neq\phi$，则在 $U_{a,b}$ 中 $P_a=P_b$。事实上，$U_{a,b}$ 是凸的，因而是连通的。再者，如果 $U_{a,b}\neq\phi$，则 $U_{a,b}\cap\boldsymbol{R}^n\neq\phi$，并对任意 $c\in U_{a,b}\cap\boldsymbol{R}^n$，我们有

$$D^\alpha P_a(c)=D^\alpha f(c)=D^\alpha P_b(c),$$

因而我们可以应用解析开拓原理 1.1.2。这样，令 $F|U_a=P_a$，我们就定义了一个 U 上的全纯函数 F。显然，$F|\Omega=f$。

现在我们回到实值函数的情形。令 N 是闭单位区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个邻域，并令 $f\in C^k(N)$，$k\geqslant 1$。则我们有：

1.1.6 引理 存在[0,1]中的一个 ξ，使得

$$f(1)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}+\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

其中

$$f^{(\nu)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu} f(t).$$

证明 对于N上的一个连续函数g，令

$$I_0(g, t) = g(t),$$

$$I_r(g, t) = \int_0^t I_{r-1}(g, s) ds, \quad r \geqslant 1.$$

显然，如果 $g \in C^k(N)$，以及对 $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$，$g^{(\nu)}(0)=0$，则我们有

$$g(t) = I_k(g^{(k)}, t).$$

如果我们将此应用于

$$g(t) = f(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^{\nu},$$

我们就得到

1.1.7 $$f(1) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = I_k(g^{(k)}, 1) = I_k(f^{(k)}, 1).$$

如果m和M分别表示$f^{(k)}$在$[0,1]$中的下界和上界[1]，显然，我们即有

$$\frac{m}{k!} \leqslant I_k(f^{(k)}, 1) \leqslant \frac{M}{k!}.$$

因为$f^{(k)}$是连续的，因而它可取m和M之间的所有的值，因此存在一个ξ，$0 \leqslant \xi \leqslant 1$，使得

$$I_k(f^{(k)}, 1) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi).$$

这就证明了引理.

用归纳法容易证明

$$I_k(g, t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t g(s)(t-s)^{k-1} ds.$$

因而可以把(1.1.7)写为下述形式:

1.1.8 $$f(1) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

---

1) 指下确界和上确界. ——译者注

1.1.9 定理 (Taylor 公式) 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并令 $f\in C^k(\Omega)$. 令 $x, y\in\Omega$, 并假设连接 x 和 y 的闭线段 $[x, y]$ 包含在 Ω 中，则我们有

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)(x-y)^\alpha,$$

其中 ξ 是 $[x, y]$ 的一个点.

证明 这个定理从应用于函数

$$g(t)=f(y+t(x-y))$$

的引理 1.1.6 立即可以得出，而这个函数对于 $[0,1]$ 的一个适当的邻域 N 属于 $C^k(N)$.

当 $f\in C^m(\Omega)$ 以及 S 是 Ω 的一个子集时，我们令

$$\|f\|_m^S=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in S}|D^\alpha f(x)|.$$

注意，如果 $f, g\in C^m(\Omega)$, 则我们有

1.1.10 $$\|fg\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S\|g\|_m^S,\quad \|f+g\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S+\|g\|_m^S.$$

当 k 有限时，我们定义 $C^k(\Omega)$ 上的一个拓扑如下：$g\in C^k(\Omega)$ 的邻域的一个基本系由所有集合

$$B(g, K, \varepsilon)=\{f\in C^k(\Omega)\mid \|f-g\|_k^K<\varepsilon\}$$

给出，其中 ε 遍及所有正实数，K 遍及 Ω 的所有紧子集. 通过把所有集合

$$\{f\in C^\infty(\Omega)\mid \|f-g\|_m^K<\varepsilon\}$$

看作 $g\in C^\infty(\Omega)$ 的邻域的基本系而得到 $C^\infty(\Omega)$ 上的相应的拓扑，其中 ε, K 如前所述，m 是任意的正整数.

显然，对于有限维 (q 维)向量空间 E, 我们可以在 $C^k(\Omega, E)$ $(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 上引进类似的拓扑，此拓扑使得空间 $C^k(\Omega, E)$ 代数地和拓扑地同构于 Descartes 积 $(C^k(\Omega))^q$. 这个同构依赖于 E 上的基的选择. 然而，$C^k(\Omega, E)$ 典则同构于 $C^k(\Omega)\otimes E$.

容易知道，$C^k(\Omega)$ 上的上述拓扑有可数基. 一个序列 $\{f_\nu\}$ 收敛于 0，当且仅当对所有 α, $|\alpha|\leqslant k$ (所有 α, 如果 $k=\infty$), 在任

何紧集上一致地 $D^\alpha f_\nu \to 0$。并且，上述拓扑是可度量化的；当 $k < \infty$ 时，我们可以把函数

$$d(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_k^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_k^{K_\nu}}$$

取作为度量，其中 $\{K_\nu\}$ 是一列紧集，$K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$（$K_{\nu+1}$ 的内点集），并且 $\cup K_\nu = \Omega$。当 $k = \infty$ 时，代替上述函数，我们取函数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_\nu^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_\nu^{K_\nu}}$$

作为度量.

1.1.11 定理 对于 $0 \leqslant k \leqslant \infty$，$C^k(\Omega)$ 是一个完备度量空间.

证明 我们只须证明，如果 $\{g_\nu\}$ 是 $C^k(\Omega)$ 中的一个函数序列，对于所有整数 $m \leqslant k$ 和所有紧集 $K \subset \Omega$（条件 $m \leqslant \infty$ 是无意义的），当 $\mu, \nu \to \infty$ 时，

$$\|g_\nu - g_\mu\|_m^K \to 0,$$

则存在 $g \in C^k(\Omega)$，使得对于所有整数 $m \leqslant k$ 和所有紧集 K，有

$$\|g_\nu - g\|_m^K \to 0.$$

然而，对于任何 α，$|\alpha| \leqslant k$，存在一个连续函数 g_α，使得

$$\|D^\alpha(g_\nu) - g_\alpha\|_0^K \to 0, \text{ 当 } \nu \to \infty \text{ 时}$$

（因为显然在每一紧集上一致地有 $D^\alpha(g_\nu - g_\mu) \to 0$）。因此我们只须证明 $g = g_0 \in C^k(\Omega)$ 以及 $D^\alpha g = g_\alpha$。为此，只需证明当 $|\alpha| \leqslant k - 1$，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，$|\beta| = 1$ 时，有 $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ 以及 $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

如果 $a \in \Omega$，x 在 a 的附近，由 Taylor 公式，我们有

1.1.12 $$D^\alpha g_\nu(x) - D^\alpha g_\nu(a) = \sum_{|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} g_\nu(\xi_\nu)(x - a)^\beta,$$

其中 ξ_ν 是线段 $[a, x]$ 上的一点. 我们可以选择一个子序列 $\{\nu_p\}$，使得

$$\xi_{\nu_p} \to \xi \in [a, x].$$

如果我们在(1.1.12)中用 ν_p 代替 ν，并令 $p \to \infty$，我们就得到

$$g_\alpha(x) - g_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(\xi)(x - a)^\beta$$

$$= \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(a)(x-a)^\beta + o(|x-a|),$$

其中 $o(|x-a|)$ 是一个函数，当 $x \to a$ 时，它趋于零的速度快于 $|x-a|$. 后一等式是从 $g_{\alpha+\beta}$ 的连续性得来的. 这就蕴涵着 $g_\alpha \in C^1(\Omega)$, 以及当 $|\beta|=1$ 时我们有 $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

1.1.13 注 对于 $C^k(\Omega, E)$, 同样的结果显然也成立.

Taylor 公式的另一推论如下:

1.1.14 命题 当 $f \in C^\infty(\Omega)$时，f 是解析的，当且仅当对于任何紧集$K \subset \Omega$,存在一个 $M > 0$, 使得

1.1.15 $|D^\alpha f(x)| \leqslant M^{|\alpha|+1}\alpha!$ 对于 $x \in K$ 和所有 α.

证明 若 f 是解析的，此不等式从引理 1.1.5 和 Cauchy 不等式 1.1.4 即得. 反之，如果(1.1.15)成立，并且 x 属于 $a \in \Omega$ 的一个紧的凸邻域 K, 则对 $\xi \in [a, x]$, 我们有

$$\left|\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi)(x-a)^\alpha\right| \leqslant k^n M^{k+1}|x-a|^k.$$

若 $|x-a| < M^{-1}$, 则 Taylor 公式即蕴涵着

$$\sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

收敛于 $f(x)$.

1.1.16 注 容易验证，(1.1.15)等价于下述事实：存在一个 $M'>0$, 使得

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant M'^{|\alpha|+1}(|\alpha|)! \text{ 对于 } x \in K \text{ 和所有 } \alpha.$$

§1.2. 单 位 分 解

在叙述主要结果之前，我们先引进一些定义.

一个拓扑空间X的一个子集族 $\{E_i\}_{i\in I}$ 称为局部有限的，如果每个点 $a \in X$ 有一个邻域 U, 使得

$$\{i \in I \mid E_i \cap U \neq \emptyset\} \text{ 是有限的.}$$

一个族 $\{E'_j\}_{j\in J}$ 称为族 $\{E_i\}_{i\in I}$ 的加细，如果存在一个映射

$$r: J \to I$$

(称为加细映射),使得对于所有 $j \in J$, $E'_j \subset E_{r(j)}$.

我们将要用到属于 Dieudonné [1944]的下述命题.其证明可在有关集合拓扑的标准教科书中找到(例如,Bourbaki[1965,1958]).

1.2.1 命题 如果 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间,它是一系列紧集的可数的并集,则 X 是仿紧的,即,X 的任何开覆盖有一个局部有限的加细,此加细也是 X 的一个开覆盖. 再者,对于 X 的任意局部有限开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, 存在一个 X 的(具有相同指标集合的)开覆盖 $\{V_i\}_{i\in I}$, 使得 $\bar{V}_i \subset U_i$.

1.2.2 定义 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集,$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 的一个开覆盖. 一个 C^∞ 函数族 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 称为从属于覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的一个单位分解,如果

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1;\ \operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_i;$$

集合族 $\{\operatorname{supp}(\varphi_i)\}$ 是局部有限的,并且

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1,\ \text{对于任何}\ x \in \Omega.$$

1.2.3 定理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集,$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 的一个开覆盖,则存在一个从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解.

为了证明此定理,我们需要两个引理.

1.2.4 引理 存在一个 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 函数 η, 适合 $\eta \geqslant 0$, $\eta(0) > 0$, $\operatorname{supp}(\eta) \subset \{x \mid \|x\| < 1\}$.

证明 令 $0 < c < 1$, 并令 s 是由

$$s(r) = \begin{cases} \exp(-1/(c-r)) & \text{当}\ r < c\ \text{时}; \\ 0 & \text{当}\ r \geqslant c\ \text{时} \end{cases}$$

所定义的 $\boldsymbol{R}^1$ 上的 C^∞ 函数. 我们可以取

$$\eta(x) = s(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

1.2.5 引理 令 K 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个紧集,U 是包含 K 的一个开集,则存在一个 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 函数 φ, 对于所有 x, $\varphi(x) \geqslant 0$; 对于 $x \in K$, $\varphi(x) > 0$, 并且 $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$.

证明 令 δ 是 K 与 $\boldsymbol{R}^n - U$ 之间的距离. 对于 $a \in K$, 令

$$\varphi_a(x) = \eta\left(\frac{x-a}{\delta}\right),$$

其中 η 如引理 1.2.4 中所述. 令

$$V_a = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \varphi_a(x) > 0\},$$

则 $a \in V_a \subset U$. 因为K是紧的,因而存在有限个点 $a_1, \cdots, a_p \in K$,使得

$$K \subset V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_p}.$$

我们可以取 $\varphi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{a_j}$.

定理 1.2.3 的证明 令 $\{V_j\}_{j\in J}$ 是 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的一个局部有限细分,它由Ω的相对紧开子集所组成(由命题 1.2.1,它是存在的). 令 $\{W_j\}_{j\in J}$ 是Ω的一个开覆盖,使得 $\overline{W}_j \subset V_j$(命题 1.2.1). 由引理 1.2.5,存在一个Ω上的 C^∞ 函数 ϕ_j,使得对于 $x \in \overline{W}_j$, $\phi_j(x) > 0$,以及 $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset V_j$, $0 \leqslant \phi_j$. 令

$$\varphi_j' = \frac{\phi_j}{\sum_{j'\in J} \phi_{j'}}$$

[因为 $\{V_j\}$ 是局部有限的,因此 $\Sigma_{j'\in J}\phi_{j'}$ 有意义[1],属于 $C^\infty(\Omega)$,并且,因为在 W_j 上 $\phi_j > 0$ 和 $\cup W_j = \Omega$,因此处处 $\Sigma_{j'\in J}\phi_{j'} > 0$.]

显然,

$$\varphi_j' \geqslant 0,\ \mathrm{supp}(\varphi_j') \subset V_j \text{ 以及 } \sum_{j\in J} \varphi_j' = 1.$$

令 $r: J \to I$ 是使得 $V_j \subset U_{r(j)}$ 的一个映射. 令 $J_i \subset J$ 是集合 $r^{-1}(i)$. 令 $\varphi_i = \Sigma_{j\in J_i}\varphi_j'$,其中在空集上求和表示0. 因为集合 J_i 互不相交并且它们的并集覆盖 J,我们即有

$$\sum_{i\in I} \varphi_i = \sum_{j\in J} \varphi_j' = 1.$$

显然,$\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_i$. 因为集合族 $\{\mathrm{supp}(\varphi_j')\}$ 是局部有限的,因此 $\{\mathrm{supp}(\varphi_i)\}$ 也是局部有限的.

---

1) 原文将 $\Sigma_{j'\in J}\phi_{j'}$ 误为 $\Sigma'_{j\in J}\phi_{j'}$.——译者注

1.2.6 推论 令Ω是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，X是Ω的一个闭子集，U是Ω的包含X的一个开子集，则存在Ω上的一个C^∞函数ψ，使得当$x\in X$时$\psi(x)=1$，当$x\in\Omega-U$时$\psi(x)=0$，并且处处$0\leqslant\psi\leqslant 1$.

证明 由定理 1.2.3，存在C^∞函数$\varphi_1, \varphi_2\geqslant 0$，满足$\operatorname{supp}(\varphi_1)\subset U$，$\operatorname{supp}(\varphi_2)\subset\Omega-X$，以及在$\Omega$上$\varphi_1+\varphi_2=1$. 我们可以取$\psi=\varphi_1$.

1.2.7 引理 如果$\{U_i\}_{i\in I}$是Ω的一个开覆盖，则存在C^∞函数ψ_i，使得$\operatorname{supp}(\psi_i)\subset U_i$，$0\leqslant\psi_i\leqslant 1$，并且在$\Omega$上$\Sigma_i\psi_i^2=1$.

证明 若$\{\varphi_i\}$是从属于$\{U_i\}$的一个单位分解，则我们可以取

$$\psi_i=\frac{\varphi_i}{\left(\sum_{j\in I}\varphi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

§1.3. 逆函数定理，隐函数定理和秩定理

令Ω是$\boldsymbol{R}^n$中的一个开集，并令$f\in C^1(\Omega, m)$，即，f是从Ω到$\boldsymbol{R}^m$中的一个C^1映射. 令$a\in\Omega$.

1.3.1 定义 $(df)(a)$定义为从$\boldsymbol{R}^n$到$\boldsymbol{R}^m$中的$\boldsymbol{R}$线性映射:

$$(df)(a)(v_1,\cdots,v_n)=(w_1,\cdots,w_m),$$

其中

$$w_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)v_k.$$

这个映射$(df)(a)$称为f在a处的微分.

对于从$\boldsymbol{C}^n$的一个开集到$\boldsymbol{C}^m$中的一个全纯映射f，我们用相同的方式定义微分$(df)(a)$，即

$$(df)(a)(v_1,\cdots,v_n)=(w_1,\cdots,w_m),$$

$$w_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a)v_k.$$

$y) = 0$，则 $y = y(x)$. 并且，$x \mapsto y(x)$ 是连续映射，满足 $f(x, y(x)) = 0$.

1.3.6 注 此定理对于全纯映射 $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \boldsymbol{C}^{n_2}$（这里的记号是明白的）有一个显然类似物；此时 $y(x)$ 是全纯的.

1.3.7 引理 假设与记号如定理 1.3.5 所述. 令 $A(x) = (d_2 f)(x, y(x))$ 和 $B(x) = (d_1 f)(x, y(x))$. 如果 U 是 a 的一个足够小的邻域，则对于 $x \in U$，$A(x)$ 是一个同构，并且 $y \in C^1(U, n_2)$，以及

1.3.8
$$(dy)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x).$$

证明 由于 y 是连续的，因此 $x \mapsto A(x)$ 是从 U_1 到所有线性映射 $\boldsymbol{R}^{n_2} \to \boldsymbol{R}^{n_2}$（$n_2 \times n_2$ 矩阵）空间中的一个连续映射. 此外，$A(a)$ 是一个同构. 因而，如果 U 是 a 的一个充分小的邻域，则对于所有 $x \in U$，$A(x)$ 也是一个同构. 我们假设 U 是凸的. 令 x，$x + \xi \in U$，$\eta = y(x + \xi) - y(x)$，则 $f(x + \xi, y(x) + \eta) = 0$，以致由 Taylor 公式得到

$$0 = f(x, y(x)) + B(x)\xi + A(x)\eta + o(|\xi| + |\eta|)$$
$$\text{当 } |\xi| \to 0 \text{ 时；}$$

此外，当 $\xi \to 0$ 时，$\eta \to 0$，以及 $f(x, y(x)) = 0$. 这就给出了

$$A(x)\eta = -B(x)\xi + o(|\xi| + |\eta|).$$

如果 K 是 U 的一个紧子集，则 $A(x)^{-1}$ 在 U 上是连续的，因而在 K 上是有界的（在明显的意义下），所以我们得到

$$\eta = -A(x)^{-1} \circ B(x) \cdot \xi + o(|\xi| + |\eta|).$$

因而，如果 $|\xi|$ 足够小，则存在一个常数 $C > 0$，使得

$$|\eta| \leqslant C|\xi| + \frac{1}{2}|\eta|,$$

所以 $|\eta| \leqslant 2C|\xi|$. 因此，

$$y(x + \xi) - y(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x) \cdot \xi + o(|\xi|),$$
$$\text{当 } |\xi| \to 0 \text{ 时，}$$

这就意味着 $y \in C^1(U, n_2)$ 和(1.3.8)成立.

1.3.9 推论 假设与记号如定理 1.3.5 中所述. 令 U 是 a 的一个邻域，使得对于 $x \in U$，$(df)(x, y(x))$ 是一个同构. 如果

此外，$f(\varphi(y)) = \varphi(y) + g(\varphi(y)) = y$. 因为 $f|W$ 是内射的，因而 φ 是 f 的逆. 显然 φ 是连续的，因为 φ_ν 是连续的，这就证明了定理. 稍后一些我们将看到 $\varphi \in C^1(V, n)$.

1.3.3 注 对于全纯映射而言，也有类似的定理. 令 Ω 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个开集，$f:\Omega \to \boldsymbol{C}^n$ 是一个全纯映射，使得对于某个 $a \in \Omega$，$(df)(a)$ 是一个同构，则存在 a 的一个邻域 U 和 $f(a)$ 的一个邻域 V，使得 $f|U$ 是从 U 到 V 上的一个同胚，并且，$f|U$ 的逆映射是全纯的. 此定理的证明与上面所给出的证明是一样的. 如上述一样地定义 U，V 和 φ_ν；$\{\varphi_\nu\}$ 一致收敛于 $f|U$ 的逆 φ. 因为每个 φ_ν 是全纯的，由定理 1.1.3，φ 也是全纯的.

1.3.4 定义 令 Ω_1, Ω_2 分别是 $\boldsymbol{R}^{n_1}, \boldsymbol{R}^{n_2}$ 的开子集，令 f 是从 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 到 $\boldsymbol{R}^p$ 中的一个 C^1 映射，并令 $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. 用 $g(y) = f(a, y)$ 定义一个映射 $g:\Omega_2 \to \boldsymbol{R}^p$. 偏微分 $(d_2f)(a, b)$ 定义为从 $\boldsymbol{R}^{n_2}$ 到 $\boldsymbol{R}^p$ 中的线性映射 $(dg)(b)$. 类似地定义偏微分 $(d_1f)(a, b)$.

1.3.5 定理 令 Ω_1, Ω_2 分别是 $\boldsymbol{R}^{n_1}, \boldsymbol{R}^{n_2}$ 中的开集，令 f 是从 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 到 $\boldsymbol{R}^{n_2}$ 中的一个 C^1 映射. 假设对于某个 $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$，我们有 $f(a, b) = 0$，并且 $\operatorname{rank}(d_2f)(a, b) = n_2$[1]. 则存在 (a, b) 的一个邻域 $U_1 \times U_2$，使得对于任何 $x \in U_1$，存在唯一的 $y = y(x) \in U_2$ 满足 $f(x, y(x)) = 0$. 此外，映射 $x \longmapsto y(x)$ 是连续的.

证明 考虑由

$$F(x, y) = (x, f(x, y))$$

定义的映射 $F:\Omega_1 \times \Omega_2 \to \boldsymbol{R}^{n_1+n_2}$. 则 $(d_2f)(a, b)$ 的秩为 n_2，当且仅当 $(dF)(a, b)$ 是一个同构. 因而，由定理 1.3.2，存在 (a, b) 的一个邻域 $U \times U_2$ 和 $(a, 0)$ 的一个邻域 W，使得 $F|U \times U_2 \to W$ 是一个同胚. 令 $\varphi: W \to U \times U_2$ 是 $f|U \times U_2$ 的连续逆映射. 存在 a 的一个邻域 U_1，使得 $x \in U_1$ 蕴涵着 $(x, 0) \in W$. 对于 $x \in U_1$，令 $y(x)$ 是 $\varphi(x, 0)$ 在 U_2 上的投影. 显然，如果 $y \in U_2$ 满足 $f(x,$

1) $\operatorname{rank}(d_2f)(a,b)$ 是 $(d_2f)(a,b)$ 的秩. ——译者注

自然，这是一个从 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{C}^m$ 中的 $\boldsymbol{C}$ 线性映射. 在 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{R}^2$ 的自然等同(利用 Cauchy-Riemann 方程)下，我们可以把这个映射等同于上面所给出的映射.

1.3.2 定理 如果 f 是一个从 Ω 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 C^1 映射，并且对于某个点 $a\in\Omega$，$(df)(a)$ 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到其自身上的一个同构，则存在 a 的一个邻域 U 和 $f(a)$ 的一个邻域 V，使得 $f|U$ 是到 V 上的一个同胚.

证明 不失一般性，我们可以假设 $a=0$，$f(a)=0$. 因为 $(df)(a)=A$ 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个同构，因此我们可以用 $A^{-1}\circ f$ 代替 f，因而可假设 $(df)(a)$ 是单位矩阵. 令

$$g(x)=f(x)-x,$$

它定义在 Ω 上. 显然 $(dg)(a)=0$，这蕴涵着存在 0 的一个邻域 $W=\{x\,|\,|x_j|<r\}$，$\overline{W}\subset\Omega$，使得 $x,y\in\overline{W}$ 蕴涵着

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|.$$

因而，若 $x,y\in\overline{W}$，我们即有

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\frac{1}{2}|x-y|,$$

因此 f 在 W 上是内射的. 令 $V=\left\{x\,\Big|\,|x_j|<\frac{1}{2}r\right\}$，$U=W\cap f^{-1}(V)$.

定义 $\varphi_0:V\to W$ 为 $\varphi_0(y)=0$，再归纳地定义

$$\varphi_\nu(y)=y-g(\varphi_{\nu-1}(y)).$$

用归纳法容易验证

$$\varphi_\nu(V)\subset W,\quad \nu\geqslant 0,$$

并且，

$$|\varphi_\nu(y)-\varphi_{\nu-1}(y)|=|g(\varphi_{\nu-1}(y))-g(\varphi_{\nu-2}(y))|\leqslant r2^{-\nu}\quad(\nu\geqslant 2),$$

当 $\nu=1$ 时此式也成立. 因而 $\{\varphi_\nu\}$ 一致收敛于一个映射 $\varphi:V\to\boldsymbol{R}^n$. 因为 $\varphi_\nu(V)\subset W$，因此我们有 $\varphi(V)\subset\overline{W}$ 和

$$\varphi(y)=y-g(\varphi(y)).$$

因为在 V 上 $|y|<r/2$，并且 $|g(\varphi(y))|\leqslant r/2$，即得 $\varphi(V)\subset W$;

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2),\ k \geqslant 1,$$

则我们有

$$y \in C^k(\Omega_2,\ n_2).$$

证明 当 $k=1$ 时，这就是引理 1.3.1. 对于 $k>1$，我们用归纳法来证明. 如果

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2)$$

和

$$y \in C^r(U, n_2),\ r < k,$$

则由定义，$x \mapsto A(x)$, $B(x)$ 是从 U 到相应的有限维向量空间中的 C^r 映射. 而此时(1.3.8)即蕴涵着 $y \in C^{r+1}(U, n_2)$.

1.3.10 注 用推论 1.3.9 的记号,如果 f 是实解析的,则 y 也是实解析的. 这是引理 1.1.5 和注 1.3.6 的直接推论.

1.3.11 注 在定理 1.3.2 的假设和记号下,如果 $f \in C^k(\Omega, n)$ (或者，实解析的),则 $(f|U)^{-1}$ 也属于 C^k (或者，实解析的). 这从推论 1.3.9 和应用于由 $g(x,y) = x - f(y)$ 定义的映射 $g: \boldsymbol{R}^n \times \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ 的注 1.3.10 立即可得.

1.3.12 注 定理 1.3.2 以及注 1.3.11 是熟知的逆函数定理. 定理 1.3.5，推论 1.3.9 和注 1.3.10 即为隐函数定理.

1.3.13 定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个立方体是一个形如 $\{x \mid |x_j - a_j| < r_j\}$ 的集合. $\boldsymbol{C}^n$ 中的多圆柱是一个形如 $\{z \mid |z_j - a_j| < r_j\}$ 的集合.

1.3.14 秩定理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f \in C^k(\Omega, m) (k \geqslant 1)$，即，$f: \Omega \to \boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^k 映射. 假设 $(df)(x)$ 的秩是一个不依赖于 $x \in \Omega$ 的整数 r，则存在 a 的一个开邻域 U，$b = f(a)$ 的一个开邻域 V，分别在 $\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^m$ 中的立方体 Q, Q'，以及 C^k 微分同胚 $u: Q \to U$ 和 $u': V \to Q'$，使得 $\varphi = u' \circ f \circ u$ 有下述形式:

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0).$$

再者,如果 f 是解析的,则可选取 u, u'，使得它们以及它们的逆都为解析的.

证明 通过 $\boldsymbol{R}^n$, R^m 的仿射自同构,我们不妨假设 $a=0$, $b=0$，以及 $(df)(0)$ 是线性映射

$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto (v_1, \cdots, v_r, 0, \cdots, 0).$$

考虑由

$$w(x) = (f_1(x), \cdots, f_r(x), x_{r+1}, \cdots, x_n)$$

所定义的映射 $w: \Omega \to \boldsymbol{R}^n$，自然，其中

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_r(x), \cdots, f_m(x)).$$

此时，$(dw)(0)$ 是单位矩阵，因而，由逆函数定理（注 1.3.12），存在 0 的一个邻域 U 和一个立方体 Q，使得 $w|U \to Q$ 是一个 C^k 微分同胚．令 $u = (w|U)^{-1}$．显然有

$$f \circ u(y) = (y_1, \cdots, y_r, \varphi_{r+1}(y), \cdots, \varphi_m(y)),$$

其中 $\varphi_j \in C^k(Q)$．记 $\phi = f \circ u$，那么，对于 $y \in Q$，我们有

$$\operatorname{rank}(d\phi)(y) = r,$$

因而

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, \text{ 当 } j, k > r \text{ 时}.$$

这样，φ_j 与 $y_{r+1}, \cdots, y_n$ 无关．现在令 $Q = Q^r \times Q^{n-r}$，其中 Q^r，Q^{n-r} 分别是 $\boldsymbol{R}^r$, $\boldsymbol{R}^{n-r}$ 中的立方体．令

$$v: Q^r \times \boldsymbol{R}^{m-r} \to Q^r \times \boldsymbol{R}^{m-r}$$

是由

$$\begin{aligned} v(y_1, \cdots, y_r, \cdots, y_m) \\ = (y_1, \cdots, y_r, y_{r+1} - \varphi_{r+1}(y_1, \cdots, y_r), \cdots, \\ y_m - \varphi_m(y_1, \cdots, y_r)) \end{aligned}$$

所定义的映射．显然，v 是一个 C^k 微分同胚．令 Q' 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个立方体，使得

$$v \circ \phi(Q) \subset Q' \subset Q^r \times \boldsymbol{R}^{m-r},$$

并令 $V = v^{-1}(Q')$．如果我们令 $u' = v|Q'$，则我们有

$$\begin{aligned} u' \circ f \circ u(x_1, \cdots, x_n) &= u' \circ \phi(x_1, \cdots, x_n) \\ &= (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

注意，当 f 是解析的时候，我们可以用实解析映射代替 C^k 映射．

1.3.15 注 显然，对于全纯映射也有类似的秩定理．我们不去明确地叙述这个定理了，因为其叙述和证明本质上与定理 1.3.14 是相同的．

§1.4. Sard 定理和函数相关性

.14.1 引理 令Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f:\Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是一个映射，它在Ω的任意紧子集上满足 Lipschitz 条件，即，对于任何一个紧集 $K\subset\Omega$，存在一个常数 $M>0$，使得当 $x, y\in K$ 时，$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$. 那么，对于任何零测集 $S\subset\Omega$，$f(S)$ 的测度为 0 .

证明从零测集的定义立即得到.

1.4.2 引理 若Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f\in C^1(\Omega,n)$，则 f 把零测集映为零测集.

1.4.3 引理 如果 m, n 是整数，$m>n$，并且如果Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f:\Omega\to\boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^1 映射，那么 $f(\Omega)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的测度为 0 .

证明 如果我们用

$$g(x_1,\cdots,x_m)=f(x_1,\cdots,x_n)$$

定义 $g:\Omega\times\boldsymbol{R}^{m-n}\to\boldsymbol{R}^m$，则由引理 1.4.2，$g\circ f(\Omega)=g(\Omega\times 0)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度.

1.4.4 定义 令Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f:\Omega\to\boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^1 映射. 一个点 $a\in\Omega$ 称为 f 的临界点，如果 $\operatorname{rank}(df)(a)<m$.

1.4.5 注 (a) 如果 $m>n$，则Ω的每一点都是临界点. (b) f 的临界点的全体在Ω中是闭的.

本节的主题是证明下述定理.

1.4.6 Sard 定理 如果Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f:\Omega\to\boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^∞ 映射，并且如果 A 是 f 的临界点集合，则 $f(A)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度.

事实上，如果我们只假设 $f\in C^r(\Omega,m)$，这里 $r=\max(n-m+1,1)$，这个定理仍然成立. 然而，这个较强形式的定理的证明需要更精细的分析：例如，可参阅 Sard[1942] 和 Morse[1939]；也可参阅 Malgrange [1966]. Whitney [1936] 证明了可微性要求

$\max(n-m+1,1)$ 是最好的可能；他给出了一个从 R^n 到 $R^m(n>m)$ 的 C^{n-m} 映射的例子，此映射的临界点集合的像包含一个非空开集。

在着手证明定理 1.4.6 之前，我们先在较弱的可微性假设下证明 $m=n$ 时的 Sard 定理。

1.4.7 命题 令 Ω 是 R^n 中的一个开集，$f: \Omega\to R^n$ 是一个 C^1 映射．如果 A 是 f 的临界点集合，则 $f(A)$ 在 R^n 中有零测度．

证明 令 $a\in A$．由假设，$\operatorname{rank}(df)(a)<n$；因而 $f(a)+(df)(a)(R^n)$ 是 R^n 的一个维数 $<n$ 的仿射子空间 V_a．令 $u_1,\cdots,u_n$ 是中心在 $f(a)$ 处的 R^n 的一个正交基，使得 V_a 在由 $u_1,\cdots,u_{n-1}$ 张成的空间中．令 Q 是包含在 Ω 中的一个闭立方体；我们只须证明 $f(Q\cap A)$ 有零测度．此刻，如果 $x,y\in Q$，则我们有

$$f(x)-f(y)=(df)(y)(x-y)+r(x,y),$$

其中，当 $\|x-y\|\to 0$ 时，在 $Q\times Q$ 上一致地有

$$r(x,y)=o(\|x-y\|);$$

因而，存在一个函数 $\lambda: R^+\to R^+$，当 $t\to 0$ 时 $\lambda(t)\to 0$，使得

$$\|r(x,\ y)\|\leqslant\lambda(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

如果 $\varepsilon>0$ 充分地小，并且 x 在一个边长为 ε 的立方体 Q_ε 中，Q_ε 包含 $a\in A$，则 $f(x)$ 位于两个超平面

$$u_n=2\lambda(\varepsilon)\varepsilon \ \text{和}\ u_n=-2\lambda(\varepsilon)\varepsilon$$

之间的区域中．再者，由 Taylor 公式，$f(x)$ 位于边长为 $M\varepsilon$，中心为 $f(a)$ 的一个立方体中（其边平行于关于 u_i 的坐标轴），M 是一个不依赖于 a，x 和坐标系 $\{u_i\}$ 的选择的常数．边长为 $M\varepsilon$ 的这个立方体与在超平面 $u_n=\pm 2\lambda(\varepsilon)\varepsilon$ 之间的那个区域的交集的体积 $\leqslant 4M^n\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$．因为正交坐标变换保持 R^n 中的测度不变，我们就知道 $f(Q_\varepsilon)$ 的测度 $\leqslant 4M^n\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$．令 l 是 Q 的一边的长度．把 Q 分成边长为 ε 的 $(l/\varepsilon)^n$ 个立方体 Q_i，$i=1,\cdots,(l/\varepsilon)^n$．我们已经知道，若 $Q_i\cap A\neq\varnothing$，则[1]

1) meas 是英文 measure（测度）的缩写．——译者注

$$\text{meas} f(Q_i) \leqslant 4M^n\varepsilon^n\lambda(\varepsilon).$$

因而

$$\text{meas } f(A\cap Q) \leqslant \sum_{i, A\cap Q_i\neq\phi} \text{meas } f(A\cap Q_i) \leqslant l^n 4M^n\lambda(\varepsilon).$$

由于当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\lambda(\varepsilon)\to 0$，所以 $\text{meas } f(A\cap Q) = 0$.

为了证明定理 1.4.6，我们需要一个预备命题.

1.4.8 命题 若 $f:\Omega\to \boldsymbol{R}^1$ 是一个 C^∞ 函数，A 是 f 的临界点集合，则 $f(A)$ 有零测度.

证明 定义

$$A_k = \{a\in\Omega \mid D^\alpha f(a) = 0, \text{ 对于所有 } \alpha: 0 < |\alpha| \leqslant k\}.$$

显然，$A_{k+1}\subset A_k$，并且我们有

1.4.9 $$A = A_1 = (A_1 - A_2)\cup(A_2 - A_3)\cup\cdots \cup(A_{n-1} - A_n)\cup A_n.$$

此刻如果 $a\in A_n$，并且 Q 是 Ω 中的任意一个闭立方体，使得 $a\in Q$[1]，则我们有

$$|f(x) - f(a)| \leqslant M|x-a|^{n+1},$$

以致边长为 ε 的包含 a 的立方体的像在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的测度 $\leqslant M\varepsilon^{n+1}$($M>0$ 是一个固定的常数). 因而，通过把 Q 分成 $(l/\varepsilon)^n$ 个边长为 ε 的立方体，如在命题 1.4.7 的证明中一样，我们就知道 $f(A_n)$ 的测度 $\leqslant l^n M\varepsilon$，然而 ε 是任意的，因此 $f(A_n)$ 的测度为 0． 如果 $n=1$，则 $A = A_1 = A_n$，因而在这个情形命题 1.4.8 就被证明了. 用归纳法，现在我们假设：若 Ω' 是 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的一个开集，g 是从 Ω' 到 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个 C^∞ 映射，并且，若 A_g 是 g 的临界点的集合，则 $g(A_g)$ 有零测度.

回到关于映射 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}^1$ 的分解 (1.4.9)，我们只须证明，对于 $1\leqslant k<n$，$f(A_k - A_{k-1})$ 有零测度. 为此，如果我们令 $B_k = A_k - A_{k+1}$，则只需证明任何 $a\in B_k$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有一个邻域 U，使得 $f(U\cap B_k)$ 有零测度.

---

1) 原文将 $a\in Q$ 误为 $a\in\Omega$. ——译者注

由于 $a \notin A_{k+1}$，所以存在一个多重指标

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \ |\alpha| = k+1,$$

使得

$$D^\alpha f(a) \neq 0.$$

如果 $\alpha_i \neq 0$，则令

$$\beta = \alpha - (0, \cdots, 1, \cdots, 0),$$

其中，右端的第二项中第 i 个位置是 $\dot{1}$，其余都为 0，并令 $h = D^\beta f$，则 $(dh)(a)$ 在 a 处有最大的秩，即为 1．因而，由秩定理1.3.14，存在 a 的一个邻域 U，$\boldsymbol{R}^n$ 中的一个立方体 Q 和一个 C^∞ 微分同胚 $u: U \to Q$，使得

$$u(\{x \mid h(x) = 0\}) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in Q \mid x_1 = 0\} \equiv H.$$

由假设，$u(B_k) \subset H$；我们令

$$Q' = \{(x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \mid (0, x_2, \cdots, x_n) \in H\}.$$

令 g 是 Q' 上的一个 C^∞ 函数，它由

$$g(x_2, \cdots, x_n) = F(0, x_2, \cdots, x_n)$$

所定义，其中 $F = f \circ u^{-1}$．如果 $S = u(B_k \cap U)$，则显然有 $F(S) \subset g(A_g)$，其中 A_g 是 g 的临界点集合．由归纳假设，$g(A_g)$ 有零测度，因而 $F(S) = f(U \cap B_k)$ 也有零测度．

1.4.10 推论 如果 $f: Q \to \boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^∞ 映射，$B = \{x \mid (df)(x) = 0\}$，则 $f(B)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度．

证明 若 $f = (f_1, \cdots, f_m)$，则 $B \subset B_1 = \{x \mid (df_1)(x) = 0\}$；因而

$$f(B) \subset f_1(B_1) \times \boldsymbol{R}^{m-1}.$$

由命题 1.4.8，$f_1(B_1)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中有零测度，因而 $f_1(B_1) \times \boldsymbol{R}^{m-1}$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度．

最后，我们还需要一个结果，此结果是关于把重积分表为迭积分的 Fubini 定理的一个直接推论．

1.4.11 引理 令 S 是 $\boldsymbol{R}^p = \boldsymbol{R}^r \times \boldsymbol{R}^{p-r} (0 < r < p)$ 中的一个可测集．我们用 (x, y)，$x \in \boldsymbol{R}^r$，$y \in \boldsymbol{R}^{p-r}$，表示 $\boldsymbol{R}^p$ 中的点．对于 $c \in \boldsymbol{R}^r$，令

$$S_c = \{y \in \boldsymbol{R}^{p-r} | (c, y) \in S\},$$

则 S 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中有零测度，当且仅当对几乎所有的 $c \in \boldsymbol{R}^r$[1]，S_c 在 $\boldsymbol{R}^{p-r}$ 中有零测度.

我们只需把 Fubini 定理应用于 S 的特征函数即可［按定义，S 的特征函数在 S 上等于 1，在 S 外等于 0］.

定理 1.4.6 的证明 令

$$E_k = \{x \in \Omega | \operatorname{rank}(df)(x) = k\},$$

其中 $f: \Omega \to \boldsymbol{R}^m$ 是定理 1.4.6 中所给出的 C^∞ 映射. 当 $m > n$ 时，此定理是引理 1.4.3 的直接推论. 因而我们不妨假设 $n \geqslant m$. 此时我们有

$$A = \bigcup_{0 \leqslant k < m} E_k.$$

我们必须证明，任意 $a \in E_k$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有一个邻域 U，使得 $f(U \cap E_k)$ 有零测度. 我们知道，对于每个 k，集合

$$\{x \in \Omega | \operatorname{rank}(df)(x) \leqslant k\} = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant k} E_r$$

是闭的；因而 E_k 是局部闭的，即，对于任意 $a \in E_k$ 和 a 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中所有足够小的邻域 U，$U \cap E_k$ 在 U 中是闭的，因而 $U \cap E_k$ 是可列个紧集的并集. 由于紧集在 f 下的像是紧的，因而是可测的，所以 $S_k = f(U \cap E_k)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中是可测的.

当 $k = 0$ 时，由推论 1.4.10，$S_k = S_0$ 有零测度. 令 $0 < k < m$ 和 $a \in E_k$. 若 $f = (f_1, \cdots, f_m)$，则经过诸 f_i 的一个置换，我们可以假设

$$\operatorname{rank}(du)(a) = k,$$

其中 $u = (f_1, \cdots, f_k)$. 存在 Ω 上的 C^∞ 函数 $u_{k+1}, \cdots, u_n$（事实上，可取为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的线性函数），使得

$$\operatorname{rank}(dw)(a) = n,$$

其中

---

1) 原文将 $c \in \boldsymbol{R}^r$ 误为 $c \in \boldsymbol{R}^p$. ——译者注

$$w = (f_1, \cdots, f_k, u_{k+1}, \cdots, u_n).$$

由逆函数定理 1.3.11，存在 a 的任意小的邻域 U 和 $w(a)$ 的任意小的邻域 V，使得 $w: U \to V$ 是一个 C^∞ 微分同胚. 映射

$$F = f \circ w^{-1}: V \to \boldsymbol{R}^m$$

有下述形式:

$$F(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_k, F_{k+1}(u), \cdots, F_m(u));$$

如果

$$E'_k = \{u \in V \mid (dF)(u) \text{ 的秩等于 } k\},$$

则

$$S_k = f(U \cap E_k) = F(E'_k).$$

对于 $c \in \boldsymbol{R}^k$，我们用

$$F_c(y) = (F_{k+1}(c, y), \cdots, F_m(c, y))$$

定义映射

$$F_c: V_c \to \boldsymbol{R}^{m-k},$$

其中 $V_c = \{y \in \boldsymbol{R}^{n-k} \mid (c, y) \in V\}$. 显然，

$$(c, y) \in E'_k \Longleftrightarrow (dF_c)(y) = 0.$$

因而，由推论 1.4.10，若

$$E'_{k,c} = \{y \in V_c \mid (c, y) \in E'_k\},$$

则 $F_c(E'_{k,c})$ 在 $\boldsymbol{R}^{m-k}$ 中的测度为 0. 再者，

$$S_{k,c} = \{y \in \boldsymbol{R}^{m-k} \mid (c, y) \in S_k = F(E'_k)\} = F_c(E'_{k,c}).$$

因而，由于 S_k 是可测的，则由引理 1.4.11，S_k 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度. 正如我们已经说明的那样，至此就完成了定理 1.4.6 的证明.

这个定理的一般形式，由 Marston Morse, A. P. Morse 和 Sard 所得到.

现在我们来给出 Sard 定理的一个应用.

1.4.12 应用 令 $f_1, \cdots, f_m \in C^\infty(\Omega)$. $\{f_i\}$ 称为在 Ω 的一个子集 S 上函数相关的，如果存在一个开集

$$\Omega' \supset f(S), \quad \{f = (f_1, \cdots, f_m): \Omega \to \boldsymbol{R}^m\}$$

和 Ω' 上的一个 C^∞ 函数 g，使得 $g^{-1}(0)$ 在 Ω' 中是无处稠密的，并且对于 $x \in S$，$g(f(x)) = 0$. 如果可以选到实解析的 g，则 $\{f_i\}$ 称

为解析相关的. 相应的定义也适用于全纯函数.

1.4.13 引理 如果X是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任一闭集, 则存在一个函数 $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, 使得 $X = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}$.

证明 存在$\boldsymbol{R}^n$中的开集 U_p, $p \geqslant 1$, 使得 $X = \bigcap_{p \geqslant 1} U_p$. 令$\{K_m\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一紧子集序列,使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \boldsymbol{R}^n, \quad K_m \subset \mathring{K}_{m+1}.$$

由推论 1.2.6, 存在 $\varphi_p \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, 使得 $0 \leqslant \varphi_p \leqslant 1$, 以及在$X$上 $\varphi_p = 0$, 在 $\boldsymbol{R}^n - U_p$ 上 $\varphi_p = 1$.

令

$$c_p = \|\varphi_p\|_p^{K_p} = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in K_p} |D^\alpha \varphi_p(x)|.$$

选取 $\varepsilon_p > 0$, 使得

$$\sum_1^\infty \varepsilon_p c_p < \infty.$$

令

$$\phi_m = \sum_{p=1}^m \varepsilon_p \varphi_p,$$

则对任一紧集 $K \subset \boldsymbol{R}^n$, 我们有 $K \subset K_r$ (对于某个 r), 因此如果给定 $p > 0$, 并且 $m' \geqslant m > r, p$, 则

$$\|\phi_m - \phi_{m'}\|_p^K \leqslant \sum_{q > m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_p^K \leqslant \sum_{q > m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_q^{K_q} \to 0,$$

当 $m \to \infty$ 时.

因而 $\{\phi_m\}$ 是 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 中的 Cauchy 序列,其极限 φ 显然有所要求的性质.

1.4.14 定理 若 $f = (f_1, \cdots, f_m): \Omega \to \boldsymbol{R}^m$ 是一个 C^∞ 映射, 则 $\{f_i\}$ 在 Ω 的每个紧子集上是函数相关的, 当且仅当对于所有的 $x \in \Omega$, $\operatorname{rank}(df)(x) < m$.

证明 假设对于某个 $a \in \Omega$, $\operatorname{rank}(df)(a) = m$,则对于所有充分接近 a 的 x, $\operatorname{rank}(df)(x) = m$, 因而,由秩定理, 存在一个 a 的

相对紧邻域 U，使得 $f(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集，因此 $f(\overline{U})$ 不是无处稠密的。显然，$\{f_i\}$ 在 $\overline{U}$ 上不是函数相关的。

反之，如果对于所有 $x\in\Omega$，$\operatorname{rank}(df)(x)<m$，则由 Sard 定理 1.4.6，$f(\Omega)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中有零测度。如果 $K\subset\Omega$ 是紧的，则 $f(K)$ 是一个零测度的紧集，因而是无处稠密的。由引理 1.4.13，存在 $g\in C^\infty(\boldsymbol{R}^m)$，使得 $g^{-1}(0)=f(K)$。显然，对于 $x\in K$，$g\circ f(x)=0$。

关于解析相关性，有一个稍微弱一些的命题。

1.4.15 定理 令 $f=(f_1,\cdots,f_m):\Omega\to\boldsymbol{R}^m$ 是一个解析映射，则对于任意 $x\in\Omega$，$\operatorname{rank}(df)(x)<m$，当且仅当下述事实成立：存在一个无处稠密的闭集 $S\subset\Omega$，它具有下述性质：任意 $a\in\Omega-S$ 都有一个邻域 $U\subset\Omega$，使得 $\{f_i|U\}$ 是解析相关的。

注意，由解析开拓原理，如果 Ω 是连通的，则对于所有 $x\in\Omega$，$\operatorname{rank}(df)(x)<m$，当且仅当对于 Ω 的某个非空开子集中的所有 x，$\operatorname{rank}(df)(x)<m$。

证明 我们不妨假设 Ω 是连通的。如果存在具有上面所述的那些性质的一个集合 S，则对于 $x\in\Omega-S$，显然有 $\operatorname{rank}(df)(x)<m$（定理 1.4.14），因而在 Ω 上也有 $\operatorname{rank}(df)(x)<m$，因为集合

$$\{x\mid\operatorname{rank}(df)(x)=m\}$$

是开的。

反之，令

$$p=\max_x\operatorname{rank}(df)(x)<m;$$

选取 $b\in\Omega$，使得

$$\operatorname{rank}(df)(b)=p.$$

这蕴涵着存在指标 $j_1,\cdots,j_p$ 和 $k_1,\cdots,k_p$，$1\leqslant j_r\leqslant m$，$1\leqslant k_s\leqslant n$，使得 $h(b)\neq0$，其中

$$h(x)=\det\left(\frac{\partial f_{j_r}}{\partial x_{k_s}}(x)\right).$$

令 $S=\{x\in\Omega\mid h(x)=0\}$。因为 h 在 Ω 中是解析的，并且 $\neq0$，所以 S 不会包括任何开集，因而是无处稠密的。

显然，

$$\operatorname{rank}(df)(x)=p,\ x\in\Omega-S.$$

由秩定理 1.3.15，存在 a 的一个邻域 U，$f(a)$ 的一个邻域 V[1]，分别在 $\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m$ 中的立方体 Q,Q'，以及解析同构 $u:Q\to U$，$u':V\to Q'$，使得 $u'\circ f\circ u$ 是映射 $(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(x_1,\cdots,x_p,0,\cdots,0)$. 如果 $u'=(u'_1,\cdots,u'_m)$，并且我们令 $g=u'_m$，则我们有

$$g\circ f=0\quad \text{在 } U \text{ 上}.$$

1.4.16 例 令 $\varphi(z)$ 是复变量 z 的一个整函数，它不是一个多项式，并且在实轴上是实的（例如，$\varphi(z)=\exp(z)$）. 考虑由

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_1x_2,x_1\varphi(x_2))$$

给出的映射 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$. 可以证明，不存在 $0\in\boldsymbol{R}^2$ 的一个邻域中的解析函数 $g\neq 0$，使得在 $0\in\boldsymbol{R}^2$ 的一个邻域中 $g\circ f=0$. 这说明了在定理 1.4.15 中集合 S 的出现是必要的.

1.4.17 注 经过明显的改动后，定理 1.4.15 和例 1.4.16 也适用于全纯函数.

§1.5. 关于 Taylor 级数的 Borel 定理

令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，使得 $0\in\Omega$，并令 $f\in C^\infty(\Omega)$. 我们用 $T(f)$ 表示形式幂级数

$$T(f)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)x^\alpha;$$

若 $m>0$ 是一个整数，我们令

$$T^m(f)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)x^\alpha;$$

自然，$T^m(f)$ 是一个多项式.

1.5.1 定义 令 X 是 Ω 的一个闭子集. 我们说 $f\in C^k(\Omega)$ 在 X 上是 m-平坦的 $(m\leqslant k)$，如果对于所有 $x\in X$ 和所有满足 $|\alpha|\leqslant m$ 的 α，$D^\alpha f(x)=0$. 如果 $f\in C^\infty(\Omega)$，且对于所有 $x\in X$ 和所有 α，

1) a 是 $\Omega-S$ 中的任意一点. ——译者注

$D^\alpha f(x)=0$，我们就说 f 在 X 上是平坦的。

1.5.2 引理 令 $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 在 0 处是 m-平坦的。那么，给定 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，它在 0 的一个邻域中为 0，并使得

$$\|g-f\|_m^{R^n}<\varepsilon.$$

证明 由推论 1.2.6，存在一个函数 $\eta\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使得对于所有 x，$\eta(x)\geq 0$，当 $|x|\leq\frac{1}{2}$ 时 $\eta(x)=0$，当 $|x|\geq 1$ 时 $\eta(x)=1$。对于 $\delta>0$，定义

$$g_\delta(x)=\eta\left(\frac{x}{\delta}\right)f(x).$$

显然，$g_\delta\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，并且在 0 附近等于 0；因而只需证明

$$\sup_{x\in R^n}|(D^\alpha g_\delta)(x)-(D^\alpha f)(x)|\to 0 \text{ 当 } \delta\to 0 \text{ 时，}$$

$$\text{若 } |\alpha|\leq m.$$

我们有

$$g_\delta(x)=f(x) \quad \text{若 } |x|\geq\delta;$$

因而

$$\sup_{x\in R^n}|D^\alpha g_\delta(x)-D^\alpha f(x)|=\sup_{|x|\leq\delta}|D^\alpha g_\delta(x)-D^\alpha f(x)|.$$

因为 f 在 0 处是 m-平坦的，即 $D^\alpha f(0)=0$，$|\alpha|\leq m$，因此

$$\sup_{|x|\leq\delta}|D^\alpha f(x)|\to 0 \text{ 当 } \delta\to 0 \text{ 时，若 } |\alpha|\leq m.$$

我们有[1]

$$D^\alpha g_\delta(x)=\sum_{\mu+\nu=\alpha}\binom{\alpha}{\nu}\delta^{-|\nu|}(D^\nu\eta)\left(\frac{x}{\delta}\right)(D^\mu f)(x).$$

因为当 $|x|\geq 1$ 时 $\eta(x)=1$，所以

$$\sup_{x\in R^n}|D^\nu\eta(x)|=M_\nu<\infty.$$

因而

$$|D^\alpha g_\delta(x)|\leq M\sum_{\mu+\nu=\alpha}\delta^{-|\nu|}|D^\mu f(x)|,$$

$$M=\max_\nu\binom{\alpha}{\nu}M_\nu.$$

---

1) 这就是求微商的 Leibniz 公式。——译者注

然而 $D^\mu f$ 在 0 处是 $(m-|\mu|)$-平坦的，以致

$$\sup_{|x|\leq\delta}|D^\mu f(x)|=o(\delta^{m-|\mu|})\text{ 当 }\delta\to 0\text{ 时；}$$

因而

$$\sup_{|x|\leq\delta}|D^\alpha g_\delta(x)|=o\left(\sum_{\mu+\nu=\alpha}\delta^{m-|\mu|-|\nu|}\right)=o(1)\text{ 若 }|\alpha|\leq m.$$

这就证明了引理.

1.5.3 注 实际上在引理 1.5.2 中只需假设 $f\in C^m(\boldsymbol{R}^n)$，在 0 处 m-平坦的即可. 特别，引理 1.5.2 中的函数 g 在 0 处是平坦的.

1.5.4 Borel 定理 对于每个 n 重非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，给定一个实常数 c_α，则存在一个函数 $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(0)=c_\alpha.$$

换言之，由 $f\mapsto T(f)$ 所给出的从 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 到 n 个变量的形式幂级数环的映射是映上的.

证明 令

$$T_m(x)=\sum_{|\alpha|\leq m}c_\alpha x^\alpha.$$

显然，$T_{m+1}-T_m$ 在 0 处是 m-平坦的，因而，由引理 1.5.2，存在一个在 0 的一个邻域中为 0 的函数 $g_m\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\|T_{m+1}-T_m-g_m\|_m^{R^n}<2^{-m}.$$

显然，函数

$$f=T_0+\sum_{m=0}^{\infty}(T_{m+1}-T_m-g_m)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

再者，对于任何 $k>0$，和式 $\Sigma_{m\geq k}(T_{m+1}-T_m-g_m)$在 0 处是 k-平坦的. 因而

$$T^k(f)=T^k\left(T_0+\sum_{m=0}^{k-1}(T_{m+1}-T_m-g_m)\right)=T_k.\text{ 证毕.}$$

Borel 的这个定理是 Whitney [1934] 关于闭集上的可微函数的一些重要定理的一个极特殊的情形. 我们将在下面不加证明地叙述在这个方向上 Whitney 的主要定理之一，在 Malgrange[1966]

的书中给出了它的一个漂亮的证明，此证明基于由 Glaeser [1958] 所引入的简化.

1.5.5 Whitney 的开拓定理 第 1 部分 令 k 是一个 >0 的整数，Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，X 是 Ω 的一个闭子集. 假设对于每一个 n 重非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|\leqslant k$，给出一个 X 上的连续函数 f_α. 则存在 $f\in C^k(\Omega)$，使得 $D^\alpha f|X=f_\alpha(|\alpha|\leqslant k)$ 的充分必要条件是：对于任何 α，$|\alpha|\leqslant k$，当 $|x-y|\to 0$ 时在 X 的任何紧子集上一致地有

$$f_\alpha(x)=\sum_{|\beta|\leqslant k-|\alpha|}\frac{1}{\beta!}f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta+o(|x-y|^{k-|\alpha|}).$$

1.5.6 Whitney 的开拓定理 第 2 部分 对于每个 α，给定 X 上的一个连续函数 f_α. 则存在一个函数 $f\in C^\infty(\Omega)$，使得对所有 α，$D^\alpha f|X=f_\alpha$，当且仅当对任一整数 $m>0$ 和任一紧集 $K\subset X$，当 $x,y\in K$，$|x-y|\to 0$ 时一致地有

$$f_\alpha(x)=\sum_{|\beta|\leqslant m}\frac{1}{\beta!}f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta+o(|x-y|^m).$$

Borel 定理是定理 1.5.6 当 X 化为单个的点 0 时的特殊情形.

§1.6. Whitney 逼近定理

我们从一个引理开始.

1.6.1 引理 令 $f\in C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$，$0\leqslant k<\infty$. 对于 $\lambda>0$，令

$$\begin{aligned}I_\lambda(f)(x)&\equiv g_\lambda(x)\\&=c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)\exp\{-\lambda[(x_1-y_1)^2+\cdots\\&\qquad+(x_n-y_n)^2]\}dy\\&=c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)\exp\{-\lambda\|x-y\|^2\}dy,\end{aligned}$$

其中 $c=\pi^{-\frac{1}{2}n}$，因而

$$c\int_{\boldsymbol{R}^n}\exp(-\|x\|^2)dx=1.$$

则我们有

$$\|g_\lambda - f\|_k^{R^n} \to 0 \text{ 当 } \lambda \to \infty \text{ 时}.$$

注意，$g_\lambda \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

证明 我们有

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} f(x-y)\exp(-\lambda\|y\|^2)dy,$$

因而，对于 $|\alpha| \leqslant k$，我们有

$$\begin{aligned} D^\alpha g_\lambda(x) &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} (D^\alpha f)(x-y)\exp(-\lambda\|y\|^2)dy \\ &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} (D^\alpha f)(y)\exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy. \end{aligned}$$

这就给出

$$\begin{aligned} &D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) \\ &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy. \end{aligned}$$

因为 $f \in C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$，因此对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon/2 \text{ 对于 } \|x-y\| \leqslant \delta \text{ 和 } |\alpha| \leqslant k.$$

再者，存在 $M > 0$，使得

$$|D^\alpha f(y)| < M \text{ 对于所有 } y, |\alpha| \leqslant k.$$

因而

$$\begin{aligned} &|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \\ &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \left| \left(\int_{\|x-y\|<\delta} + \int_{\|x-y\|\geqslant\delta} \right) \{D^\alpha f(y) \right. \\ &\qquad \left. - D^\alpha f(x)\}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} \exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy \\ &\qquad + 2Mc\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\|x-y\|\geqslant\delta} \exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy. \end{aligned}$$

但是

$$c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{R^n} \exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy = 1,$$

并且

$$c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\|x-y\|\geqslant\delta}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy$$
$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2}c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{R^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^2\right)dy$$
$$=2^{\frac{1}{2}n}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right).$$

这就给出

$$|D^\alpha g_\lambda(x)-D^\alpha f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+M2^{1+\frac{1}{2}n}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right).$$

因为对于固定的 $\delta>0$，我们可以选取充分大的 λ，使得上式右端的项 $<\varepsilon$，我们就得到了

$$\sup_{x\in R^n}|D^\alpha g_\lambda(x)-D^\alpha f(x)|\to 0 \text{ 当 } \lambda\to\infty \text{ 时},$$

这就证明了引理.

1.6.2 Weierstrass 逼近定理 令 Ω 是 R^n 中的一个开集. 任给 $f\in C^k(\Omega)(0\leqslant k<\infty)$，$\varepsilon>0$ 和一个紧集 $K\subset\Omega$，存在 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个多项式 $P(x)$，使得

$$\|f-P\|_k^K<\varepsilon.$$

证明 取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset\Omega$，且在 K 的一个邻域中 $\varphi=1$ [由推论 1.2.6，这样的 φ 是存在的]，在用 φf 代替 f 之后，我们可以假设 $f\in C_0^k(R^n)$. 由引理 1.6.1，对于给定的 $\varepsilon>0$，我们可以选择充分大的 λ，使得如果

$$I_\lambda(f)(x)\equiv g_\lambda(x)$$
$$=c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{R^n}f(y)\exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy,$$

则我们有

$$\|g_\lambda-f\|_k^K<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

然而

$$\exp(-\lambda\|x-y\|^2)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(-\lambda)^p\|x-y\|^{2p}.$$

如果我们令

$$Q_N(x, y) = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}(-\lambda)^p \|x - y\|^{2p},$$

则对于任一紧集中的 x, y，一致地有

$$D^\alpha Q_N(x,y) \to D^\alpha \exp(-\lambda\|x - y\|^2).$$

因而，如果

$$P_N(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int f(y) Q_N(x, y) dy,$$

则 P_N 是一个多项式，并且当 $N \to \infty$ 时 $\|g_\lambda - P_N\|_k^K \to 0$.

1.6.3 推论 如果 Ω_j 是 $\boldsymbol{R}^{n_j}$ 中的一个开集，x_j 表示 $\boldsymbol{R}^{n_j}$ 中的一般的点 $(j = 1, 2)$，则对于 $0 \leqslant k \leqslant \infty$，所有有限线性组合

$$\sum_\mu \varphi_\mu^{(1)}(x_1)\varphi_\mu^{(2)}(x_2)$$

的集合在 $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 中稠密，其中 $\varphi_\mu^{(j)} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^{n_j})$.

因为 $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 上的拓扑只涉及到紧集上的逼近，因而，用适当的具有紧支集的 C^∞ 函数乘以 $\varphi_\mu^{(j)}$ 后，我们就得到

1.6.4 推论 具有与推论 1.6.3 相同的记号，则所有有限线性组合 $\sum_\mu \varphi_\mu^{(1)}(x_1)\varphi_\mu^{(2)}(x_2)$ 的集合在 $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ 中稠密，其中 $\varphi_\mu^{(j)} \in C_0^\infty(\Omega_j)$.

现在我们来讨论 Whitney [1934] 的一个逼近定理，这个定理在深入研究可微流形和解析流形时是十分重要的.

1.6.5 Whitney 逼近定理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$f \in C^k(\Omega)$，$0 \leqslant k \leqslant \infty$. 令 η 是 Ω 上的一个连续函数，对于任何 $x \in \Omega$，$\eta(x) > 0$. 则存在一个 Ω 上的实解析函数 g，使得

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \eta(x)$$

$$\text{对于 } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant \min\left(k, \frac{1}{\eta(x)}\right);$$

(自然，$\min(\infty, a) = a$，若 $a \in \boldsymbol{R}$).

我们先把这个结果稍微改动一下.

1.6.6 注 令 $\{K_p\}$ 是 Ω 的一紧子集序列，使得 $K_0 = \varnothing$，$K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$，并且 $\bigcup K_p = \Omega$. 若 $\{\varepsilon_p\}$ 是一严格的正数序列，则存在一个连续函数 η，使得对于任何 x，$\eta(x) > 0$，对于 $x \in K_{p+1} - K_p$(p

$\geqslant 0$), $\eta(x) < \varepsilon_p$.

因而,定理 1.6.5 可以如下地叙述.

1.6.7 定理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集,$f \in C^k(\Omega)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. 令 $\{K_p\}$ 是 Ω 的一紧子集序列,使得 $K_0 = \varnothing$, $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$, 并且 $\bigcup K_p = \Omega$. 令 $\{n_p\}$ 是一个任意的正整数序列,并令 $m_p = \min(k, n_p)$. 最后,令 $\{\varepsilon_p\}$ 是一个任意的正数序列. 则存在一个 Ω 上的实解析函数 g, 使得对于每个 $p \geqslant 0$, 有

$$\|f - g\|_{m_p}^{K_{p+1}-K_p} < \varepsilon_p.$$

证明 我们不妨假设 $m_{p+1} \geq m_p (p \geq 0)$. 如果 $\varphi, \psi \in C^{m_p}(\Omega)$, 并且 $S \subset \Omega$, 则由(1.1.10),我们有

$$\|\varphi\psi\|_{m_p}^S \leqslant \|\varphi\|_{m_p}^S \|\psi\|_{m_p}^S.$$

令 $L_p = K_{p+1} - K_p (p \geqslant 0)$. 令 $\varphi_p \in C^\infty(\Omega)$, 使得 $\operatorname{supp}(\varphi_p)$ 在 Ω 中是紧的,当 x 在 K_{p-1} 的一个邻域中时 $\varphi_p(x) = 0$, 当 x 在 $\overline{L}_p$ 的一个邻域中时 $\varphi_p(x) = 1$. [由推论 1.2.6, 这样的 φ_p 是存在的]. 令

$$M_p = 1 + \|\varphi_p\|_{m_p}^\Omega.$$

选取 $\delta_p > 0$, 使得

$$\textbf{1.6.8} \quad 2\delta_{p+1} \leqslant \delta_p, \quad \sum_{q \geqslant p} \delta_q M_{q+1} \leqslant \frac{1}{4} \varepsilon_p \quad \text{对于 } p \geqslant 0.$$

如在引理 1.6.1 中一样,若 $f \in C_0^0(\boldsymbol{R}^n)$, 我们定义 $I_\lambda(f)$ 如下:

$$I_\lambda(f)(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y) \exp(-\lambda\|x - y\|^2) dy,$$

$$c \int_{\boldsymbol{R}^n} \exp(-\|x\|^2) dx = 1.$$

由引理 1.6.1, 存在一个 $\lambda_0 > 0$, 使得若 $g_0 = I_{\lambda_0}(\varphi_0 f)$, 则我们有

$$\|g_0 - \varphi_0 f\|_{m_0}^{K_1} < \delta_0.$$

现在我们归纳地定义数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_p, \cdots$ 和函数 $g_0, g_1, \cdots g_p, \cdots$ 如下. 假设已经给出 $g_0, \cdots, g_{p-1}, \lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$. 由引理 1.6.1, 存在一个函数 $l_p(\lambda_j, g_j)(j \leqslant p-1)$, 使得如果 $\lambda_p > l_p$ 和 $g_p = I_{\lambda_p}[\varphi_p(f - g_0 - \cdots - g_{p-1})]$, 则

$$\textbf{1.6.9} \quad \|g_p - \varphi_p(f - g_0 - \cdots - g_{p-1})\|_{m_p}^{K_{p+1}} < \delta_p.$$

因为 g_p 只依赖于 λ_p 和 $g_0, \cdots, g_{p-1}$，因而我们知道 l_p 只是 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$ 的函数。

因为在 K_{p-1} 的一个邻域上 $\varphi_p = 0$，因此 (1.6.9) 蕴涵着

1.6.10 $$\|g_p\|_{m_p}^{K_{p-1}} < \delta_p;$$

并且，因为在 $\bar{L}_p$ 的一个邻域上 $\varphi_p = 1$，则我们有

1.6.11 $\|f - g_0 - \cdots - g_p\|_{m_p}^{L_p} < \varepsilon_p$, $L_p = K_{p+1} - K_p$.

这样，用 $p+1$ 代替了 p 的(1.6.9)就给出了

$$\|g_{p+1}\|_{m_p}^{L_p} \leqslant \left\|\varphi_{p+1}\left(f - \sum_0^p g_q\right)\right\|_{m_p}^{L_p}$$

$$+ \left\|g_{p+1} - \varphi_{p+1}\left(f - \sum_0^p g_q\right)\right\|_{m_p}^{L_p}$$

$$\leqslant \|\varphi_{p+1}\|_{m_p}^{\Omega}\left\|f - \sum_0^p g_q\right\|_{m_p}^{L_p} + \delta_{p+1}$$

$$\leqslant M_{p+1}\delta_p + \delta_{p+1};$$

此外，我们有(1.6.10)

$$\|g_{p+1}\|_{m_p}^{K_p} \leqslant \delta_{p+1};$$

由此得到

$$\left\|g_{p+1}\right\|_{m_p}^{K_{p+1}} \leqslant M_{p+1}\delta_p + 2\delta_{p+1} \leqslant M_{p+1}\delta_p$$

$$+ \delta_p \leqslant 2\delta_p M_{p+1}.$$

特别，

$$\left\|\sum_{q>p} g_q\right\|_{m_p}^{K_{p+1}} \leqslant 2\sum_{q>p} \delta_q M_{q+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_p.$$

这蕴涵着

$$g = \sum_{q=0}^{\infty} g_q \in C^{m_p}(\Omega) \text{ 对于所有 } p.$$

并且，由(1.6.11)，

$$\left\|f - g\right\|_{m_p}^{L_p} \leqslant \left\|f - \sum_0^p g_q\right\|_{m_p}^{L_p} + \left\|\sum_{q>p} g_q\right\|_{m_p}^{L_p}$$

$$< \delta_p + \frac{1}{2}\varepsilon_p < \varepsilon_p.$$

这样，如果 $\{\lambda_p\}$ 是一个序列，满足 $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1})$, $\{g_p\}$是用上面的归纳过程所定义，且 $g = \sum g_p$, 则

$$\left\|f - g\right\|_{m_p}^{K_{p+1}-K_p} < \varepsilon_p.$$

现在我们来证明，如果适当选择 $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1})$, 则 g 是解析的.

由定义，

$$g_p(x) = c\lambda_p^{\frac{1}{2}n}\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi_p(y)\Big(f(y)$$

$$- \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\Big)\exp(-\lambda_p\|x - y\|^2)dy$$

$$= c\lambda_p^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathrm{supp}(\varphi_p)} \cdots.$$

因为此积分是定义在一紧集上的，并且 $\exp(-\lambda_p\|x - y\|^2)$是 x 的解析函数，因此对于每个 p, g_p 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的解析函数. 现在令 $2\rho_p$ ＝从 $\Omega - K_{p+1}$ 到 K_p 的距离.

显然，$\rho_p > 0$. 令 U_p 是 $\boldsymbol{C}^n \supset \boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，$U_p \supset K_p$, 使得若 $z \in U_p$ 和 $y \in \Omega - K_{p+1}$, 则我们有

$$\mathrm{Re}\{(z_1 - y_1)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2\} > \rho_p;$$

显然，g_p 是整函数

$$h_p(z) = c\lambda_p^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathrm{supp}(\varphi_p)} \varphi_p(y)\Big(f(y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\Big)$$

$$\times \exp(-\lambda_p[(z_1 - y_1)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2])dy$$

在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的限制. 再者，因为当 $q > p + 1$ 时 $\mathrm{supp}(\varphi_q) \subset \Omega - K_{p+1}$, 因此，定义 $g_q(q > p + 1)$ 的那个积分可以用在 $\Omega - K_{p+1}$ 上的积分代替. 这就表明，对于 $z \in U_p$, 有

1.6.12 $$|h_q(z)| \leqslant c\lambda_q^{\frac{1}{2}n}\exp(-\lambda_q\rho_p)H_q(g_0, \cdots, g_{q-1})$$

$$= c\lambda_q^{\frac{1}{2}n}H_q\exp(-\lambda_q\rho_p),$$

其中 H_q 只依赖于 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1}$, 因为 g_p 只依赖于 $\lambda_j, j \leqslant p$. 我们可以归纳地选取

$$\lambda_q > l_q(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1}),$$

使得

$$\sum \lambda_q^{\frac{1}{2}n} H_q \exp(-\lambda_q \rho) < \infty \text{ 对于任何 } \rho > 0.$$

[我们只需选取 λ_q, 使得 $\lambda_q^{\frac{1}{2}n} H_q \exp(-\lambda_q/q) < q^{-2}$ 即可]. 由于 $\{\lambda_q\}$ 的这个选择,从(1.6.12)即得: 对于任何 p, 级数

$$h(z) = \sum h_q(z)$$

在 U_p 上一致收敛;显然, $U = \bigcup U_p$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个开集, 满足 $U \cap \boldsymbol{R}^n = \Omega$; 由 Weierstrass 定理 1.1.3, h 在 U 上是全纯的. 因而, h 在 Ω 上的限制,也就是 g, 在 Ω 上是实解析的,这样就证明了 Whitney 定理.

§ 1.7. 关于全纯函数的一个逼近定理

用全纯函数逼近的问题比在§ 1.6中所考虑的逼近问题复杂得多. 首先,因为全纯函数族的一致极限也是全纯的,因此充其量我们只能期望用复变数 $z_1, \cdots, z_n$ 的多项式去逼近全纯函数. 然而,若 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ 是一个开集, 则为了使 U 上任何全纯函数都能用多项式逼近,对于 U 需要有一些几何的和分析的条件.

在一个用多项式逼近任何全纯函数是不可能的区域上的最简单的例子是 $\boldsymbol{C}^* = \{z \in \boldsymbol{C} | z \neq 0\}$; 函数 z^{-1} 不能用 z 的多项式逼近. 在一个变量的情形,关于区域 U 的限制是拓扑性质的(定理 1.7.2 和 3.10.11), 然而对于 $n > 1$, 已经知道不再是这样的了.

1.7.1 定义 一个开集 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ 称为 Runge 域, 如果 U 上的每个全纯函数可以用 $z_1, \cdots, z_n$ 的多项式逼近,在 U 的每个紧子集上,这个逼近是一致的.

下面这个定理是第三章中所证明的一般定理(参阅 § 3.10) 的特殊情形. 它的一个基于 Cauchy 积分公式的简单的直接证明,可

参阅 Hörmander [1966].

1.7.2 Runge **定理** 一个连通开集 $U\subset \mathbf{C}$ 是一个 Runge 域，当且仅当 U 的每个连通分支是单连通的.

现在令 U 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集，$\lambda: U\to \mathbf{R}^+$ 是一个连续函数，对于所有的 $z\in U$, $\lambda(z)>0$. 令 $dv=dv_z$ 表示 $\mathbf{C}^n$ (变量为 $z_1,\cdots,z_n$) 中的 Lebesgue 测度. 令 $\mathscr{H}(\lambda)$ 是满足

$$\int_U |f(z)|^2\lambda(z)dv<\infty$$

的 U 上的全纯函数 f 的集合.

1.7.3 引理 若 $f, g\in \mathscr{H}(\lambda)$, 令

$$(f,g)_\lambda=(f,g)=\int_U f(z)\overline{g(z)}\lambda(z)dv.$$

具有这个纯量积 (f,g), $\mathscr{H}(\lambda)$ 是一个 Hilbert 空间.

证明 因为关于测度 $\lambda(z)dv_z$ 为平方可积的函数的空间 $L^2(\lambda dv)$是完备的,因此我们只须证明 $\mathscr{H}(\lambda)$ 在 $L^2(\lambda dv)$ 中是闭的. 此结论从下述命题立即得到.

1.7.4 命题 若 $\{f_p\}$ 是 $\mathscr{H}(\lambda)$ 中的一元素序列,并且

$$\int_U |f_p(z)-f_q(z)|^2\lambda(z)dv_z\to 0 \text{ 当 } p,q\to\infty \text{ 时},$$

则 $\{f_p\}$ 在 U 的每个紧子集上一致收敛.

证明 因为在 U 的任一紧子集上 λ 下有界于一个正常数，因此我们不妨假设 $\lambda\equiv 1$.

若 g 在闭圆盘 $\{z\in\mathbf{C} \mid |z-a|\leqslant\rho\}$ 的一个邻域中是全纯的，则由 Cauchy 公式,我们有

$$g(a)=(\pi\rho^2)^{-1}\int_{|z|\leqslant\rho} g(a+z)dv.$$

应用 n 次这个等式,我们就得到：如果 $h(z_1,\cdots,z_n)$ 在多圆柱 $|z_1-a_1|\leqslant\rho,\cdots,|z_n-a_n|\leqslant\rho$ 的一个邻域中是全纯的,则

$$h(a)=(\pi\rho^2)^{-n}\int_{|z|\leqslant\rho} h(a+z)dv.$$

令 K 是 U 中的一个紧集，$\rho>0$ 充分小,使得集合

$$K_\rho = \{z \in \mathbf{C}^n |\ 存在\ a \in K, 使得\ |z - a| \leqslant \rho\}$$

在 U 中是紧的. 如果 f 在 U 中全纯, $a \in K$, 我们即有

$$|f(a)| \leqslant (\pi\rho^2)^{-n} \int_{|z| \leqslant \rho} |f(a+z)| dv$$

$$\leqslant (\pi\rho^2)^{-n} \int_{K_\rho} |f(z)| dv.$$

如果我们把这个不等式应用于差的平方 $(f_p - f_q)^2$, 我们就证明了这个命题.

令 $\{\varphi_\nu\}$ 是 $\mathscr{H}(\lambda)$ 中的一个完全正交系. 那么当 $f \in \mathscr{H}(\lambda)$ 时, 我们有

$$f = \sum c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu = (f, \varphi_\nu),$$

此级数在 $\mathscr{H}(\lambda)$ 中是收敛的. 从命题 1.7.4 我们得到:

1.7.5 引理 如果 $\{\varphi_\nu\}$ 是 $\mathscr{H}(\lambda)$ 中的完全正交系, 则任何 $f \in \mathscr{H}(\lambda)$ 可用有限线性组合

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu \in \mathbf{C}$$

逼近, 在 U 的任何紧子集上这个逼近是一致的.

1.7.6 命题 令 U_1, U_2 分别是 $\mathbf{C}^{n_1}$, $\mathbf{C}^{n_2}$ 中的开集[1], 并令 λ_j 是 U_j 上严格正的连续函数 $(j = 1, 2)$. 我们用

$$(\lambda_1 \times \lambda_2)(z_1, z_2) = \lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2)$$

在 $U_1 \times U_2$ 上定义 $\lambda_1 \times \lambda_2$. 令 $\{\varphi_\nu^{(j)}\}$ 是 $\mathscr{H}(\lambda_j)$ 中的完全正交系 $(j = 1, 2)$. 则函数族 $\{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$ 构成 $\mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$ 中的完全正交系.

证明 只需证明: 如果 $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$, 并且

$$\int_{U_1 \times U_2} f(z_1, z_2)\ \overline{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)}\ \overline{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) dv = 0$$

对于所有 ν_1, ν_2 (其中 dv 是 $\mathbf{C}^{n_1+n_2}$ 中的 Lebesgue 测度), 则 $f \equiv 0$. 令 dv_j 是 $\mathbf{C}^{n_j}$ 中的 Lebesgue 测度 $(j = 1, 2)$. 我们首

---

1) 原文将 $\mathbf{C}^{n_1}$, $\mathbf{C}^{n_2}$ 误为 $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^m$.——译者注

先证明，对于 $a_1 \in U_1$，U_2 上的函数

$$z_2 \longmapsto f(a_1, z_2)$$

属于 $\mathscr{H}(\lambda_2)$. 事实上，从命题 1.7.4 的证明中知道，对于 $z_2 \in U_2$，当 $\rho > 0$ 足够小时，

$$|f(a_1, z_2)|^2 \leqslant c^{-1}(\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{|z_1-a_1|\leqslant\rho} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1) dv_1,$$

其中

$$c = \inf \lambda_1(z_1) \quad (|z_1 - a_1| \leqslant \rho),$$

因而

$$\begin{aligned}\int_{U_2} &|f(a_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 \\ &\leqslant c^{-1}(\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{U_1 \times U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) dv \\ &< \infty.\end{aligned}$$

我们断言，对于任何 ν_2，函数

$$g(z_1) = g^{(\nu_2)}(z_1) = \int_{U_2} f(z_1, z_2) \overline{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_2(z_2) dv_2$$

（由上面我们所看到的可知它是有意义的）属于 $\mathscr{H}(\lambda_1)$. 首先，$g(z_1)$ 在 U_1 中是全纯的，因为若 $\{K_p\}$ 是一竭尽 U_2 的紧集序列[1)]，则如在命题 1.7.4 中那样，

$$\int_{K_p} f(z_1, z_2) \overline{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_2(z_2) dv_2$$

收敛于 $g(z_1)$，此收敛在 U_1 的紧子集上是一致的. 再者，由 Schwarz 不等式，

$$|g(z_1)|^2 \leqslant \int_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 \int_{U_2} |\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2,$$

以致，因为 $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$，则

$$\begin{aligned}\int_{U_1} &|g(z_1)|^2 \lambda_1(z_1) dv_1 \\ &\leqslant \int_{U_1} \lambda_1(z_1) dv_1 \int_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 < \infty.\end{aligned}$$

---

1) 所谓“$\{K_p\}$ 竭尽 U_2”，是指 $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$，$\bigcup K_p = U_2$. ——译者注

这样，$g(z_1)\in\mathscr{H}(\lambda_1)$. 由假设，$g(z_1)$ 在 $\mathscr{H}(\lambda_1)$ 中正交于所有的 $\{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\}$，因而 $g(z_1)\equiv 0$. 这样，对于固定的 z_1，$f(z_1, z_2)$ 在 $\mathscr{H}(\lambda_2)$ 中正交于所有的 $\{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$，因此 $f(z_1, z_2)\equiv 0$.

1.7.7 定理 若 U_1, U_2 分别是 $\boldsymbol{C}^{n_1}$, $\boldsymbol{C}^{n_2}$ 中的开集，则所有有限线性组合

$$\sum_\nu \varphi_\nu^{(1)}(z_1)\varphi_\nu^{(2)}(z_2)$$

的集合在 $U_1\times U_2$ 上的全纯函数空间中关于紧收敛性拓扑是稠密的，其中 $\varphi_\nu^{(j)}(z_j)$ 是 U_j 上的全纯函数 $(j=1, 2)$.

证明 令 $f(z_1, z_2)$ 在 $U_1\times U_2$ 上是全纯的. 存在一个严格正的连续函数 $\eta: U_1\times U_2\to\boldsymbol{R}^+$，使得 $f\in\mathscr{H}(\eta)$，即

$$\int_{U_1\times U_2}|f|^2\eta dv<\infty.$$

令 $\{K_p^{(j)}\}$ 是 U_j 中的紧集族，使得

$$K_p^{(j)}\subset\mathring{K}_{p+1}^{(j)},\quad\bigcup K_p^{(j)}=U_j,$$

则

$$\bigcup_p K_p^{(1)}\times K_p^{(2)}=U_1\times U_2.$$

令 $0<\varepsilon_p<1$，使得对于 $(z_1, z_2)\in K_p^{(1)}\times K_p^{(2)}$，有 $\eta(z_1, z_2)\geqslant\varepsilon_p$. 令 λ_j 是U_j 上的一个严格正的连续函数，使得对于 $z_j\in K_p^{(j)}-K_{p-1}^{(j)}$，有 $\lambda_j(z_j)\leqslant\varepsilon_p$ [这样的 λ_j 是存在的，参阅注 1.6.6]. 我们有

$$\begin{aligned}K_p^{(1)}\times K_p^{(2)}-K_{p-1}^{(1)}\times K_{p-1}^{(2)}\\&=K_p^{(1)}\times(K_p^{(2)}-K_{p-1}^{(2)})\cup(K_p^{(1)}\\&\quad-K_{p-1}^{(1)})\times K_p^{(2)}.\end{aligned}$$

显然，对于

$$(z_1, z_2)\in K_p^{(1)}\times K_p^{(2)}-K_{p-1}^{(1)}\times K_{p-1}^{(2)},$$

我们有

$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2)\leqslant\varepsilon_p\leqslant\eta(z_1,z_2).$$

因而我们有

$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2)\leqslant\eta(z_1,z_2)\ \text{在}\ U_1\times U_2\ \text{上}.$$

因此 $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

若 $\{\varphi_\nu^{(j)}\}$ 是 $\mathscr{H}(\lambda_j)$ 中的一个完全正交系 ($j = 1, 2$),则所有的乘积 $\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)$ 构成 $\mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$ 中的一个完全正交系. 因为 $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$, 由引理 1.7.5, 存在复常数 $c_{\nu_1\nu_2}$, 使得形如

$$\sum c_{\nu_1\nu_2}\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)$$

的有限线性组合在 $U_1 \times U_2$ 的任何紧子集上一致逼近 f.

1.7.8 推论 若 U_j 是 $\boldsymbol{C}^{n_j}$ 中的一个 Runge 域 ($j = 1, 2$), 则 $U_1 \times U_2$ 是 $\boldsymbol{C}^{n_1+n_2}$ 中的 Runge 域. 特别,若 $U_1, \cdots, U_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中的单连通开集,则 $U_1 \times \cdots \times U_n$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的 Runge 域.

以后我们将讨论 $\boldsymbol{C}^n$ 中的 Runge 域的比较深入的性质.

§1.8. 常微分方程

1.8.1 引理 令 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中包含 0 的一个区间, $w: I \to \boldsymbol{R}^+$ 是一个连续函数. 令 $M, \eta \in \boldsymbol{R}$, $M > 0$, $\eta \geqslant 0$, 并假设对于 $t \in I$, 我们有

1.8.2
$$w(t) \leqslant M \int_0^t w(s)ds + \eta,$$

则对于 $t \in I$, 我们也有 $w(t) \leqslant \eta e^{M|t|}$.

证明 首先令 $t \geqslant 0$. 我们有

$$e^{Mt} \frac{d}{dt}\left\{e^{-Mt}\int_0^t w(s)ds\right\} = w(t) - M\int_0^t w(s)ds \leqslant \eta,$$

因此

$$e^{-Mt}\int_0^t w(s)ds \leqslant \eta \int_0^t e^{-Ms}ds = \frac{\eta}{M}(1 - e^{-Mt}).$$

此式与(1.8.2)组合,我们就得到

$$w(t) \leqslant \eta e^{Mt} \text{ (因为 } M > 0).$$

当 $t < 0$ 时,令 $\tau = -t > 0$. 我们有

$$w(-\tau) \leqslant -M\int_{-\tau}^0 w(s)ds + \eta \leqslant M\int_0^\tau w(-s)ds + \eta,$$

因而，由上面我们已知道的结果，有

$$w(-\tau) \leqslant \eta e^{M\tau},$$

即，对于 $t < 0$ 也有

$$w(t) \leqslant \eta e^{M|t|}.$$

1.8.3 定义 令 Ω, Ω' 分别是 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ 的子集，并令 $f: \Omega \times \Omega' \to \boldsymbol{R}^p$ 是一个映射. 我们说，f 在一个集合 $S \times S' \subset \Omega \times \Omega'$ ($S \subset \Omega$, $S' \subset \Omega'$) 上对于 $x' \in S'$ 一致地满足关于 $x \in \Omega$的 Lipschitz 条件，如果存在 $M > 0$, 使得对于 (x, x'), $(y, x') \in S \times S'$，有

$$\|f(x, x') - f(y, x')\| \leqslant M\|x - y\|.$$

1.8.4 定理 令 Ω, Ω' 分别是 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个开区间，$0 \in I$. 令

$$f: \Omega \times I \times \Omega' \to \boldsymbol{R}^n$$

是一个连续映射；我们用 (x, t, α) 表示 $\Omega \times I \times \Omega'$ 中的一个点. 假设，对于任意紧集 $K \subset \Omega$, $K' \subset \Omega'$, f 在 $K \times I \times K'$ 上对于 t, α 一致地满足关于 x 的 Lipschitz 条件.

则，任给 $x_0 \in \Omega$ 和紧集 $K' \subset \Omega'$, 存在一个区间 $I_0 = \{t \mid |t| < \varepsilon\}$, 对于每个 $\alpha \in K'$, 存在一个唯一的 C^1 映射 $I_0 \to \Omega$, $t \longmapsto x(t, \alpha)$, 使得

1.8.5
$$f(x(t,\alpha), t, \alpha) = \frac{\partial x}{\partial t}(t,\alpha), \quad x(0, \alpha) = x_0.$$

并且，由 $(t,\alpha) \longmapsto x(t, \alpha)$ 所给出的映射 $I_0 \times K' \to \Omega$ 是连续的.

证明 令 $M > 0$, 使得对于 $x, y \in K$, $\alpha \in K'$, 我们有

$$\|f(x,t,\alpha) - f(y,t,\alpha)\| \leqslant M\|x - y\|.$$

令 $r > 0$, 使得

$$\Omega_0 = \{x \mid \|x - x_0\| \leqslant r\} \subset \Omega;$$

令 $K \supset \Omega_0$. 令 $C > 0$, 使得在 $\Omega_0 \times I \times K'$ 上 $\|f\| < C$. 令 $\varepsilon' > 0$, 使得 $\{t \mid |t| \leqslant \varepsilon'\} \subset I$, 并令

$$I_0 = \{t \mid |t| < \varepsilon\},$$

其中 $\varepsilon = \min(\varepsilon', r/C)$. 定义 $x_0(t, \alpha) \equiv x_0$, 并且，对于 $n > 0$, 由

$$x_n(t,\alpha) = x_0 + \int_0^t f(x_{n-1}(s,\alpha),s,\alpha)ds \tag{1.8.6}$$

定义 $x_n: I_0 \times K' \to \boldsymbol{R}^n$. 我们断言，对于 $(t, \alpha) \in I_0 \times K'$，有 $x_n(t, \alpha) \in \Omega_0$。事实上，当 $n = 0$ 时，这是平凡的. 若对于 x_{n-1} 已经证明了这个事实，则因为

$$\left\|\int_0^t f(x_{n-1}(s,\alpha),s,\alpha)ds\right\| \leqslant C|t| < C\varepsilon \leqslant r,$$

因此

$$\|x_n(t, \alpha) - x_0\| < r.$$

再者，对于 $n \geqslant 0$ 我们有

$$\|x_{n+1}(t, \alpha) - x_n(t, \alpha)\| \leqslant \frac{1}{n!} M^n C|t|^n.$$

事实上，

$$\|x_1 - x_0\| = \left\|\int_0^t f(x_0,s,\alpha)ds\right\| \leqslant |t|C,$$

这就是 $n = 0$ 时，我们所要的不等式. 如果我们已经有了 $n = m$ 时的不等式，则

$$\begin{aligned}
&\|x_{m+2}(t, \alpha) - x_{m+1}(t, \alpha)\| \\
&= \left\|\int_0^t \{f(x_{m+1}(s,\alpha),s,\alpha) - f(x_m(s,\alpha), s, \alpha)\}ds\right\| \\
&\leqslant M\frac{1}{m!} M^m C \int_0^{|t|} s^m ds = \frac{1}{(m+1)!} M^{m+1} C|t|^{m+1},
\end{aligned}$$

这就是我们想要的不等式. 因而，当 $n \to \infty$ 时，$x_n(t, \alpha)$ 一致收敛于一个连续函数 $x(t, \alpha)$. 再者，在(1.8.6)中令 $n \to \infty$，我们即有

$$x(t, \alpha) = x_0 + \int_0^t f(x(s, \alpha), s, \alpha)ds,$$

这蕴涵着，对于固定的 α，映射 $t \longmapsto x(t, \alpha)$ 是 C^1 的.

最后，若对某个 $\alpha_0 \in K'$，$u: I_0 \to \Omega$ 是一个 C^1 映射且满足

$$f(u(t),t, \alpha_0) = \frac{du}{dt}(t), \quad u(0) = x_0,$$

令

$$w(t) = x(t, \alpha_0) - u(t),$$

则对于 $t \geqslant 0$，我们有

$$\|w(t)\| \leqslant M \int_0^t \|w(s)\| ds,$$

因而，由具有 $\eta = 0$ 的引理 1.8.1，这蕴涵着对于 $t \geqslant 0$，有 $w(t) = 0$。类似的推理也适用于 $t<0$，因而就得到了定理的唯一性部分。

1.8.7　注　若 $\Omega = \boldsymbol{R}^n$，并且 f 在 $\boldsymbol{R}^n \times I \times K'$ 上满足估计

$$\|f(x, t, \alpha)\| \leqslant C_1\|x\| + C_2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

则 x 在 $I \times \Omega'$ 上有定义(并是唯一的)。事实上，如果我们对于任何固定的 α 和 $t \in I$ 用 (1.8.6) 定义 x_n，那么对于 $t \geqslant 0$，我们得到[1]

$$\|x_n(t, \alpha)\| \leqslant M_1 \int_0^t \|x_{n-1}(s, \alpha)\| ds + M_2,$$

并且我们可以假设

$$\|x_0\| \leqslant M_2 e^{M_1 t}.$$

由归纳法即得

$$\|x_n(t, \alpha)\| \leqslant M_2 e^{M_1 t},$$

因此序列 $\{x_n(t, \alpha)\}_{n \geqslant 0}$ 是一致有界的 ($t \geqslant 0$；类似的推理证明了此结果对于 $t < 0$ 也成立)。我们可以应用关于 f 的 Lipschitz 条件来证明

$$\|x_n(t, \alpha) - x_{n+1}(t, \alpha)\| \leqslant \frac{1}{n!} AM^n |t|^n, \; n \geqslant 0,$$

因而我们可以重复定理 1.8.4 的证明。特别，若 f 关于 x 是线性的，则(1.8.5)的解在 $I \times \Omega'$ 上存在。

1.8.8　定理　令记号如定理 1.8.4 中所述，J 是一个开区间，它包含 I 的闭包。假设 $f \in C^k(\Omega \times J \times \Omega')$，$k \geqslant 1$ (特别，f 满足定理 1.8.4 中所述的 Lipschitz 条件)，则(1.8.5)的解 x 属于 $C^k(I_0 \times \mathring{K}')$。

证明　令 $U' = \mathring{K}'$。我们首先证明，若 $f \in C^1(\Omega \times J \times \Omega')$，则 $x \in C^1(I_0 \times U')$[2]。因为由(1.8.5)，$\partial x/\partial t$ 存在并是连续的，因

1) 原文将 $\int_0^t \|x_{n-1}(s, \alpha)\| ds$ 误为 $\int_0^t \|x_{n-1}(s)\| ds$。——译者注

2) 原文将 $x \in C^1(I_0 \times U')$ 误为 $x^1 \in C^1(I_0 \times U')$。——译者注

此，若 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，我们只需证明在 $I_0\times U'$ 上

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_j},\ j=1,\cdots,m$$

存在并是连续的．我们将假设 $t\geqslant 0$．对于固定的 t,α，令 $h_{t,\alpha}:\Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是映射 $x\mapsto f(x,t,\alpha)$，并令

$$A(t,\alpha)=(dh_{t,\alpha})(x(t,\alpha))=(d_1f)(x(t,\alpha),t,\alpha)^{1)};$$

$A(t,\alpha)$ 是一个从 $\boldsymbol{R}^n$ 到其自身中的线性变换．令

$$B(t,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial\alpha_j}(x(t,\alpha),t,\alpha);$$

B 是一个从 $I_0\times U'$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的连续映射．

由注 1.8.7，存在一个连续映射

$$y:I_0\times U'\to\boldsymbol{R}^n$$

（对于固定的 α，它是 C^1 的），使得

1.8.9 $$\frac{\partial y}{\partial t}=A(t,\alpha)y+B(t,\alpha),\quad y(0,\alpha)=0.$$

对于固定的 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in U'$ 和足够小的实数 $h\neq 0$，我们令

$$\alpha^h=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\alpha_j+h,\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_m)$$

和

$$u_h(t)=h^{-1}(x(t,\alpha^h)-x(t,\alpha)).$$

由 Taylor 公式，对于 $0\leqslant s\leqslant t$ 我们有

$$\begin{aligned}f(x(s,\alpha^h),s,\alpha^h)&-f(x(s,\alpha),s,\alpha)\\&=hA(s,\alpha)u_h(s)+hB(s,\alpha)+\varepsilon(s,h),\end{aligned}$$

其中，当 $h\to 0$ 时对于 s 一致地有

$$\varepsilon(s,h)=o(|h|\|u_h(s)\|+|h|).$$

（注意，$|h|\|u_h(s)\|+|h|=\|x(s,\alpha^h)-x(s,\alpha)\|+\|\alpha^h-\alpha\|$）．因而

$$u_h(t)=\int_0^t\{A(s,\alpha)u_h(s)+B(s,\alpha)+\delta(s,h)\}ds,$$

---

1) 原文将 $dh_{t,\alpha}$ 误为 dh．——译者注

其中

$$\delta(s, h) = \frac{1}{h} \varepsilon(s, h) = o(\|u_h(s)\| + 1).$$

这蕴涵着，存在一个常数 $C_1 > 0$，使得

$$\|u_h(t)\| \leqslant C_1 \int_0^t \|u_h(s)\| ds + C_1.$$

因而，由引理 1.8.1，当 $h \to 0$ 时，$\|u_h(t)\|$ 对于 t 是一致有界的。因而，当 $h \to 0$ 时，对于 s 一致地有 $\delta(s,h) \to 0$。

现在令

$$z_h(t) = u_h(t) - y(t, \alpha),$$

则因为

$$y(t, \alpha) = \int_0^t \{A(s, \alpha) y(s, \alpha) + B(s, \alpha)\} ds,$$

因此我们有

$$z_h(t) = \int_0^t A(s, \alpha) z_h(s) ds + \int_0^t \delta(s, h) ds.$$

因为当 $h \to 0$ 时

$$\eta = \left\| \int_0^t \delta(s, h) ds \right\| \to 0,$$

则引理 1.8.1 指出，当 $h \to 0$ 时 $z_h(t) \to 0$。这恰好意味着 $(\partial x/\partial \alpha_j)(t, \alpha)$ 存在并等于 $y(t, \alpha)$[1]。因而，正如一开始就说明的那样，有 $x \in C^1(I_0 \times U')$。

为了完成定理 (1.8.8) 的证明，现在我们用关于 k 的归纳法来进行。若 $f \in C^k(\Omega \times J \times \Omega')$，$k > 1$，且若 $x \in C^{k-1}(I_0 \times U')$，则显然，$A(t, \alpha)$，$B(t, \alpha)$ 是 C^{k-1} 函数。因为 y 满足方程

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t, \alpha) y + B(t, \alpha),$$

则归纳假设就蕴涵着 $y \in C^{k-1}(I_0 \times U')$。因为我们有

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}(t, \alpha) = y(t, \alpha), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = f(x(t, \alpha), t, \alpha),$$

---

1) 原文将 $(\partial x/\partial \alpha_j)(t, \alpha)$ 误为 $(\partial x/\partial \alpha_j)(\alpha)$。——译者注

因此 x 的所有一阶偏导数都属于 C^{k-1}，所以 $x\in C^k(I_0\times U')$.

关于全纯函数，也有显然类似于这些结果的命题.

1.8.10 定理 令 U, U' 分别是 $\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}^m$ 中的开集，$D=\{z \mid |z|<\rho\}$ 是复平面中的一个圆盘. 如果 $f: U\times D\times U'\to \boldsymbol{C}^n$ 是一个全纯映射，则对任意 $x_0\in U$ 和紧集 $K'\subset U'$，存在一个 $\delta>0$，使得对于每个 $\alpha\in K'$，存在一个唯一的全纯映射 $x: D_\delta\to U$[1]($D_\delta=\{z \mid |z|<\delta\}$)

$$x: z\longmapsto x(z, \alpha),$$

满足

$$\frac{\partial x}{\partial z}=f(x(z,\alpha), z, \alpha), \quad x(0,\alpha)=x_0.$$

并且，从 $D_\delta\times \mathring{K}'$ 到 U 中[2]的映射 $(z,\alpha)\longmapsto x(z,\alpha)$ 是全纯的.

证明 证明与定理 1.8.4 的相同；我们定义

$$x_n(z,\alpha)=x_0+\int_0^z f(x_{n-1}(\zeta,\alpha),\zeta,\alpha)d\zeta,$$

其中的积分是沿着从 0 到 z 的直线段进行的. 注意，只要 Lipschitz 条件自然地成立，我们就证明了

$$\|x_{n+1}(z,\alpha)-x_n(z,\alpha)\|\leqslant\frac{1}{n!}M^nC|z|^n;$$

显然，每个 x_n 是全纯的，因而 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 也是全纯的. 唯一性如前一样地证明.

1.8.11 推论 如果在定理1.8.4中 f 是一个实解析映射，则(1.8.5)的解 x 在 $J_0\times U'$ 中是实解析的，其中 J_0 是某个包含原点的开区间.

证明 我们可以找到分别在 $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^m$ 中的开集 W, D, W'，适合 $W\cap\boldsymbol{R}^n=\Omega$, $D\cap\boldsymbol{R}=I$, $W'\cap\boldsymbol{R}^m=\Omega'$，使得 f 可以开拓到 $W\times D\times W'$ 上成为一个全纯函数(我们仍用 f 表示这个全纯函数). 此时，方程[3]

---

1) 原文将 $D_\delta\to U$ 误为 $D_\delta\to\Omega$.——译者注

2) 原文将 U 误为 Ω.——译者注

3) 原文将 $w(0,\alpha)=x_0$ 误为 $w(0)=x_0$.——译者注

$$\frac{\partial w}{\partial z}=f(w(z,\alpha),z,\alpha),\quad w(0,\alpha)=x_0$$

的解在 $J_0 \times U'$ 的一个邻域中被定义，而且是全纯的，这里，J_0 是实轴上的一个区间，$0 \in J_0$. 并且，w 是由

$$w_0 \equiv x_0,\qquad w_n(z,\alpha)=x_0+\int_0^z f(w_{n-1}(\zeta,\alpha),\zeta,\alpha)d\zeta$$

归纳地定义的 w_n 的极限，因而对于实的 z, α, 显然它也是实的. 因此，它在 $J_0 \times U'$ 上的限制——我们正在求的解——是解析的.

1.8.12 定理 令 Ω, I, Ω' 如定理 1.8.4 中所述，并令 $f:\Omega \times I \times \Omega' \to \boldsymbol{R}^n$ 是一个 C^k (或者，实解析)映射，$1 \leqslant k \leqslant \infty$. 那么，对于任何点 $(u_0, u_0, \alpha_0, \xi_0) \in I \times I \times \Omega' \times \Omega$, 存在一个邻域 $W = J \times J \times U' \times U$ 和一个 C^k (或者，实解析) 映射 $x: W \to \boldsymbol{R}^n$, 使得对于 $t, u \in J$, $\alpha \in U'$, $\xi \in U$, 满足

$$x(u,u,\alpha,\xi)=\xi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,u,\alpha,\xi)=f(x(t,u,\alpha,\xi),t,\alpha).$$

换句话说，在一个给定点 $(u_0, u_0, \alpha_0, \xi_0)$ 的邻域中，(1.8.5)的在点 u 处取值 ξ 的解不但可微地(或者，解析地)依赖于 t, u, ξ, 而且又可微地(或者，解析地)依赖于 f 中的参变量.

证明 我们考虑点 $(0, 0, u_0, \alpha_0, \xi_0) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times I \times \Omega' \times \Omega$ 的一个邻域 Δ 和一个由

$$g(y,t,u,\alpha,\xi)=f(\xi+y,t+u,\alpha)$$

所给出的 C^k (或者，解析的)映射 $g:\Delta \to \boldsymbol{R}^n$. 若 $y(t, u, \alpha, \xi)$ 是

$$\frac{\partial y}{\partial t}=g(y,t,u,\alpha,\xi),\quad y(0,u,\alpha,\xi)=0$$

的解，则我们有

$$x(t,u,\alpha,\xi)=\xi+y(t-u,u,\alpha,\xi),$$

因而从定理 1.8.8 和推论 1.8.11 就得到我们的结论.

1.8.13 注 对于全纯函数，有一个类似于上面的定理的命题，我们就不在这里叙述了.

最后，我们注意到，定理 1.8.8 和 1.8.12 可以被加强为下述形

式.

1.8.14 定理 令 Ω, I, Ω' 如定理 1.8.3 中所述，$f:\Omega\times I\times\Omega'\to\boldsymbol{R}^n$ 是一个 C^k（或者，解析的）映射，$I_1\subset I$, $\Omega'_1\subset\Omega'$ 是连通开子集. 则若 $x:I_1\times\Omega'_1\to\Omega$ 是一个连续映射，对于固定的 α, 它关于 t 是 C^1 的，并且

$$\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial t}=f(x(t,\alpha),t,\alpha),$$

且若 $x(t_0,\alpha)$ 是 C^k 的（或者，解析的）（对于某个 $t_0\in I_1$），则 $x:I_1\times\Omega'_1\to\Omega$ 是 C^k 的（或者，解析的）[1].

证明可利用定理 1.8.12. 我们略去其细节.

1) 原文将 $x:I_1\times\Omega'_1\to\Omega$ 误为 $x:I_1\times\Omega'_1$.——译者注

第二章 流 形

§2.1. 基 本 定 义

2.1.1 定义 令V是一个 Hausdorff 拓扑空间. 我们说V是一个n维流形(或者,一个C^0流形,或者,一个局部 Euclid 空间),如果每个点$a\in V$有一个开邻域,它同胚于$\boldsymbol{R}^n$中的一个开集.

2.1.2 定义 令V如上述,并令$0\leqslant k\leqslant\infty$. 我们说$V$是一个$C^k$流形或者一个$C^k$类的(可微)流形,维数为$n$,如果存在偶$(U_i,\varphi_i)$的一个族,$i$遍及一个指标集合$\mathscr{I}$,其中$U_i$是$V$中的一个开集,$\varphi_i$是从$U_i$到$\boldsymbol{R}^n$中的一个开集上的同胚映射,使得

(a)
$$\bigcup_{i\in\mathscr{I}} U_i = V$$

和

(b) 对于任何使得$U_i\cap U_j\neq\varnothing$的$i,j\in\mathscr{I}$,映射

$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$ 是一个C^k映射.

如果可以选取$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathscr{I}}$,使得当$U_i\cap U_j\neq\varnothing$时,映射$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\boldsymbol{R}^n$是实解析的,则我们说$V$是一个实解析流形.

我们用记号[1]

$$\dim\ V=\dim_{\boldsymbol{R}}V$$

表示一个流形的维数(参阅注 2.1.4).

2.1.3 定义 如果V是一个流形,那么V上的一个C^k结构是具有定义 2.1.2 的性质 (a) 和 (b) 的偶(U_i,φ_i)的一个最大的集合$\mathfrak{B}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathscr{I}}$. $\mathfrak{B}$的元素称为这个C^k结构的坐标系. 若

---

1) dim 是英文 dimension (维数) 一字的缩写. ——译者注

(U, φ) 是一个坐标系，则 U 称为一个坐标邻域，$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$（通常记为 $x_1, \cdots, x_n$）称为 U 中的坐标。上面所述的映射 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 称为坐标变换。

注意，可以用定义 2.1.2 中所述的任意一个偶族来构造唯一的一个 C^k 结构；两个这样的族是等价的，如果它们包含在 V 上同一个 C^k 结构中。这样，我们可以谈论一个 C^k 流形上的坐标系及其它对象。一个 C^k 流形的一个开子集上具有一个自然的诱导 C^k 结构。

2.1.4 注 一个流形的维数是此流形的一个不变量（不依赖于所用到的局部同胚映射）。这一点从 Brouwer 定理即得，Brouwer 定理断言，$\boldsymbol{R}^n$ 中的一个非空开集同胚于 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集，仅当 $m=n$ 时。其证明可参阅 Hurewicz 和 Wallman [1948]. 对于 C^k 流形 $(k\geqslant 1)$ 的相应的不变性命题要简单得多，我们将在稍后加以证明。

我们注意，从 Dieudonné[1944]的一个定理(也可参阅 Bourbaki [1965])即得，对于一个流形 V，下述一些条件是等价的：

1. V 是仿紧的；即，V 的任何一个开覆盖有局部有限细分。
2. V 的每个连通分支是可列个紧集的并集。
3. V 的每个连通分支有一个开集的可数基。

2.1.5 定义 一个 Hausdorff 拓扑空间 V 称为一个复维数为 n 的复流形，如果存在一个族 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\mathscr{I}}$，其中 φ_i 是从 U_i 到 $\boldsymbol{C}^n$ 中一个开集上的同胚，并且 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 在 $\varphi_i(U_i\cap U_j)$ 上是全纯的。如在定义 2.1.3 中一样，我们定义一个复解析(或者，就称为复)结构。V 的维度记为 $n=\dim V=\dim_{\boldsymbol{C}} V$。

2.1.6 定义 若 V 是一个 C^k 流形，U 是 V 中的一个开集，则一个映射 $f: U\to\boldsymbol{R}$ 称为 U 上的一个 C^r 函数，若对于 V 上任意一个坐标系 (W, ϕ)，$W\subset U$，函数

$$f\circ\phi^{-1}: \phi(W)\to\boldsymbol{R}$$

是 C^r 的 $(0\leqslant r\leqslant k)$. 用 $C^r(V)$ 表示 V 上 C^r 函数的集合。V 上一个 C^r 函数 f 的支集 $\operatorname{supp}(f)$，仍然是集合 $\{x\in V\,|\,f(x)\neq 0\}$ 在

V 中的闭包. 我们用 $C_0^r(V)$表示 supp(f) 是紧集的函数 $f \in C^r(V)$ 的集合.

令 V, V' 是 C^k 流形, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, $\{(U'_j, \varphi'_j)\}_{j\in J}$ 分别是它们的 C^k 结构. 一个连续映射 $f: V \to V'$ 称为一个 **C^r 映射**$(0 \leqslant r \leqslant k)$, 如果对于适合 $f(U_i) \subset U'_j$ 的 V 上任何坐标系 (U_i, φ_i), 以及 V' 上任何坐标系 (U'_j, φ'_j), 映射 $\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i) \to \varphi'_j(U'_j)$是一个 C^r 映射. 我们用 $C^r(V, V')$ 表示从 V 到 V' 中的 C^r 映射的集合.

在实解析流形之间和在全纯流形之间, 类似地定义实解析和全纯的函数和映射.

令 V, V' 是 C^k(实解析,复解析)流形. 一个连续映射 $f: V \to V'$ 是 C^k(实解析,全纯)的,当且仅当下述条件被满足:

对于 V' 中的任何开集 U' 和 U' 上的任何 C^k(实解析, 全纯)函数 g', $g' \circ f$ 是 $f^{-1}(U')$ 上的一个 C^k(实解析,全纯)函数.

若 V, V' 是 C^k 流形, $f: V \to V'$ 是一个同胚,使得 f 和 f^{-1} 是 C^k 映射,则我们称 f 是 V 和 V' 之间的一个 C^k 微分同胚(或者,微分同胚,或者, C^k 同构). V, V' 被称为是微分同胚的 (C^k 微分同胚的, C^k 同构的), 如果存在一个 C^k 微分同胚 $f: V \to V'$. 在相应的流形之间类似地定义实解析和全纯(=复解析)同构.

2.1.7 例

(a) $S^1 = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ 是一个一维 C^∞ 流形.

(b) 令 V 是一个 C^k 流形, $\tilde{V}$ 是一个 Hausdorff 空间. 令 $p: \tilde{V} \to V$ 是一个局部同胚映射,即, 任意 $a \in \tilde{V}$ 有一个邻域 U, 使得 $p(U)$ 在 V 中是开的, 并且, $p: U \to p(U)$ 是一个同胚映射. 则在 $\tilde{V}$ 上存在一个唯一的 C^k 结构, 关于此结构, p 是一个局部 C^k 微分同胚 (即, 对于任意 $a \in \tilde{V}$, 存在一个邻域 U, 使得 $p|U: U \to p(U)$ 是一个 C^k 微分同胚; 注意, $p(U)$ 在 V 中是开的). 类似的注记适用于实解析流形和复流形.

(c) 若 V, W 是 C^k 流形,则 $V \times W$ 具有一个自然的 C^k 流形结构,对于此结构,投影映射 $V \times W \to V$, $V \times W \to W$ 是 C^k 映

射.

显然,一个复解析流形具有一个自然的实解析结构,一个实解析流形具有一个自然的 C^∞ 结构,一个 C^k 流形 $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ 具有一个自然的 C^r 结构 $(0 \leqslant r \leqslant k)$. 反之,从 Whitney[1936] 的一些结果即得,任何一个仿紧的 C^r 流形 $(r \geqslant 1)$, 都具有一个与其上已给的 C^r 结构相容的实解析结构. 并且, Grauert[1958] 的嵌入定理(它的叙述请参阅 §2.15) 和 Whitney 的逼近定理 1.6.5 蕴涵着这个结构是唯一的(在相差一个同构的意义下;恒等映射不一定是一个同构). 这是可能发生的,即一个 C^0 流形不具有 C^1 结构(Kervaire[1960]), 并且,即使具有 C^1 结构,这种结构也可以不是唯一的. 例如, Milnor[1956] 曾证明了:球面 S^7 (参阅例 2.5.6), 除了它的自然的结构之外,还可以具有一个 C^∞ 结构,对于这个 C^∞ 结构,在两个球面 S^7 之间不存在 C^1 微分同胚 (不仅仅恒等映射不是一个微分同胚).

复结构的存在性和唯一性的问题是一类完全不同性质的问题,这方面已经有了浩瀚的文献. (特别,可参阅 Hopf [1948], Kodaira 和 Spencer [1958].)

由于 Milnor 和 Kervaire 的结果,已经得到有关拓扑流形上的微分结构的存在性和唯一性方面的大量知识,研究这个问题的一些论文可在 1962 年和 1966 年的国际数学家大会的会议录中找到.

令 V 是一个 C^k 流形, $a \in V$. 考虑所有的偶 (f, U), 其中 U 是包含 a 的一个开集, $f \in C^k(U)$. 我们说,两个这样的偶是等价的,记为 $(f, U) \sim (f', U')$, 如果存在一个开集 $W \subset U \cap U'$, $a \in W$, 使得 $f|W = f'|W$. 显然,这是一个等价关系. 一个等价类称为在 a 处的一个 C^k 函数芽.

我们将经常把一个芽与定义它的一个 C^k 函数等同起来,如果不会发生混淆.

2.1.8 定义 定义在 a 的一个邻域 W 中的一个 C^k 函数 $f(k \geq 1)$ 称为在 a 处平稳的,如果存在一个坐标系 (U, φ), $U \subset W$, $a \in U$,

使得 $f\circ\varphi^{-1}$ 的所有一阶偏导数在 $\varphi(a)$ 处为 0. C^k 函数的一个芽在 a 处是平稳的，如果在这个芽中存在一个 (f, W)，使得 f 在 a 处是平稳的.

注意，如果 C^k 函数的一个芽在 a 处是平稳的，则定义这个芽的任何 C^k 函数在 a 处都是平稳的.

我们用 $C_{a,k}$ 表示 C^k 函数在 a 处的所有芽的集合；用 $S_{a,k}$ 表示在 a 处是平稳的 a 处的 C^k 芽的集合. 令 $\boldsymbol{m}_{a,k}$ 是在 a 处为 0 的 C^k 芽的集合. $C_{a,k}$ 是一个 $\boldsymbol{R}$-代数；$S_{a,k}$，$\boldsymbol{m}_{a,k}$ 是其子代数，并且，$\boldsymbol{m}_{a,k}$ 还是 $C_{a,k}$ 中的一个理想. 它是 $C_{a,k}$ 的唯一的极大理想；因为 $C_{a,k}-\boldsymbol{m}_{a,k}$ 的任何元素都是可逆元素. 再者，若 $f,g\in\boldsymbol{m}_{a,k}$，则 $fg\in S_{a,k}$，并且，每个常数 $\in S_{a,k}$.

当要强调这些空间对于流形 V 的依赖性时，我们分别用 $C_{a,k}(V)$，$S_{a,k}(V)$，$\boldsymbol{m}_{a,k}(V)$ 表示它们.

我们也把 C^k 函数在 a 处的芽简称为在 a 处的 C^k 芽. 用显然的方式，在 a 处的芽可以相加，相乘，以及与 C^k 映射复合. 此外，在 a 处的一个 C^k 芽 g 的值 $g(a)$ 是有意义的.

2.1.9 定义 令 V 是一个 C^k 流形，$k\geqslant 1$，则向量空间 $C_{a,k}/S_{a,k}=T_a^*(V)$ 被称为 a 处的**微分**(或余切向量，或余向量)的**空间**. 若 $f\in C_{a,k}$，则它在 $T_a^*(V)$ 中的像用 $(df)_a$ 表示.

$T_a^*(V)$ 的对偶空间 $T_a(V)$ 被称为 V 在 a 处的**切空间**，可以把 $T_a(V)$ 等同于在 $S_{a,k}$ 上为 0 的 $\boldsymbol{R}$ 线性映射 $X: C_{a,k}\to\boldsymbol{R}$ 的集合. $T_a(V)$ 的一个元素称为 a 处的一个**切向量**. 一个 $\boldsymbol{R}$ 线性函数 $L: C_{a,k}\to\boldsymbol{R}$ 称为一个**导数**，如果对于 $f,g\in C_{a,k}$，我们有

$$L(fg)=L(f)g(a)+f(a)L(g).$$

2.1.10 命题 任何一个切向量 $X\in T_a(V)$ 是 $C_{a,k}$ 上的一个导数.

证明 若 $f,g\in C_{a,k}$[1]，则

$$\varphi=fg-f(a)g-fg(a)\in S_{a,k}$$

[因为显然有 $\varphi=(f-f(a))(g-g(a))-f(a)g(a)$]. 因而

1) 原文将 $C_{a,k}$ 误为 C_a. ——译者注

$X(\varphi)=0$. 此式即意味着

$$X(fg)=f(a)X(g)+X(f)g(a).$$

令 $a\in V$, 并令 (U,φ) 是一个坐标系, $a\in U$. 若 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 和 $x\in U$, 我们令 $\varphi_j(x)=x_j$, $j=1,\cdots,n$. 对于每个 j, 我们用

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(a)),\ f\in C_{a,k}$$

定义切向量 $(\partial/\partial x_j)_a\in T_a(V)$.（显然，$(\partial/\partial x_j)_a$ 是切向量.）

2.1.11 命题 $(\partial/\partial x_1)_a,\cdots,(\partial/\partial x_n)_a$ 构成 $T_a(V)$ 的一个基；特别，$T_a(V)$ 和 $T_a^*(V)$ 是 n 维向量空间，并且 $T_a^*(V)$ 是 $T_a(V)$ 的对偶空间. 再者，若 $X\in T_a(V)$, $f\in C_{a,k}$, 则我们有 $(df)_a(X)=X(f)$.［最后的结论解释了所用的记号.］

证明 对于 $f\in C_{a,k}$, 用

$$g(x)=f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f$$

定义 $g\in C_{a,k}$. 显然, $g\in S_{a,k}$; 因而，若 $X\in T_a(V)$, 则我们有 $X(g)=0$. 由此得到

$$X(f)=\sum X(x_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f,$$

即，

$$X=\sum X(x_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a,$$

这意味着 $(\partial/\partial x_j)_a\,(1\leqslant j\leqslant n)$ 张成 $T_a(V)$.

若 $X=\sum\lambda_j(\partial/\partial x_j)_a=0$, 则我们有 $\lambda_j=X(x_j)=0$, 因为 $(\partial/\partial x_j)_a x_k=\delta_{jk}$（$\delta_{jk}$ 为 Kronecker 符号，当 $j\neq k$ 时 $\delta_{jk}=0$, 当 $j=k$ 时 $\delta_{jk}=1$）. 因而 $(\partial/\partial x_j)_a$, $j=1,\cdots,n$, 是线性无关的. 最后的结论是定义的直接推论.

与上面的结果相对偶，我们有下述命题. 若 $a\in V$, (U,φ) 是一个坐标系, $a\in U$, 如前一样，我们令 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$. 则 $x_j\in C_{a,k}$, 因而定义了一个余向量 $(dx_j)_a\in T_a^*(V)$.

2.1.11′ 命题 $(dx_j)_a(1 \leqslant j \leqslant n)$ 构成 $T_a^*(V)$ 的一个基. 这个基对偶于由命题 2.1.11 所给出的 $T_a(V)$ 的基. 再者, 若 $f \in C_{a,k}$, 则我们有

$$(df)_a = \sum \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a f \right\} (dx_j)_a.$$

其证明从下述显然的事实即得:把$(\partial/\partial x_j)_a$应用于$(dx_k)_a$——是 $(\partial/\partial x_j)_a x_k$——等于 δ_{jk}.

2.1.12 注 我们注意,我们还可以对于复值 C^k 函数 f 定义它的微分 $(df)_a$, 此时, $(df)_a$ 是 $T_a^*(V) \otimes_R \boldsymbol{C}$ 的一个元素. 并且, 对于任意 $X \in T_a(V)$ 和一个复值的 f, $(df)_a(X)$ 定义为一个复数; 再者,若我们记 $f = f_1 + if_2$, 其中 f_1, f_2 是实值 C^k 函数,则

$$(df)_a(X) = (df_1)_a(X) + i(df_2)_a(X).$$

为了某些目的,用 $T_a(V) \otimes_R \boldsymbol{C}$, $T_a^*(V) \otimes_R \boldsymbol{C}$ 代替 $T_a(V)$, $T_a^*(V)$, 并在复值对象间进行运算是非常有效的. 当有必要这样做的时候,我们将分别用 $\mathfrak{T}_a(V)$, $\mathfrak{T}_a^*(V)$ 表示这些空间.

注意,用相同的方法,我们可以把一个向量 $X \in T_a(V)$ 作用于一个复值 C^k 函数 f[1]; 此时,从 C^k 函数在 a 处的复值芽到 $\boldsymbol{C}$ 中的映射 $f \to X(f) = (df)_a(X)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 线性的.

2.1.13 注 若 V 是一个 C^k 流形, $k \geqslant 1$, 则它也是一个 C^1 流形. 这样, 我们可以考虑 $C_{a,1} = \{C^1$ 函数在 a 处的芽$\}$. 我们注意, 任意一个切向量 $X \in T_a(V)$可以开拓为 $C_{a,1}$ 的一个导数,它在 $S_{a,1}$ 上为 0; 这是命题 2.1.11 的直接推论. 还要注意,若 $1 \leqslant r \leqslant k$, 则存在一个自然的包含关系 $C_{a,k} \subset C_{a,r}$: 自然, $C_{a,k}$ 是一个子代数. 对于任何 $f \in C_{a,r}$, $1 \leqslant r \leqslant k$, 我们仍可以定义它在 $T_a^*(V)$ 中的像$(df)_a$.

2.1.14 引理 若 $f \in S_{a,k}$, 则我们可以写为

$$f = \sum_{j=1}^{n} g_j h_j + f(a),$$

1) 原文将 $X \in T_a(V)$ 误为 $X \in T_p(X)$. ——译者注

其中，g_j，h_j 属于 $C_{a,k-1}$，并在 a 处为 0，即，$g_j, h_j \in \boldsymbol{m}_{a,k-1}(k \geq 1)$.

证明 显然，我们不妨假设 V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中 0 的一个凸邻域，以及 $a=0$. 这样，我们有

$$f(x)-f(0)=\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt=\sum_{j=1}^n x_j g_j(x),$$

$$g_j(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt.$$

显然，$x_j \in \boldsymbol{m}_{a,k}$，$g_j \in C_{a,k-1}$. 并且，因为由假设 f 是平稳的，所以

$$g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)=0.$$

2.1.15 命题 假设 X 是 $C_{a,k-1}$ 的一个导数 $(k \geq 1)$. 则它在 $C_{a,k}$ 上的限制是一个切向量.（X 不一定是 $C_{a,k-1}$ 上的一个切向量；参阅 Papy[1956]）.

证明 我们必须证明，若 $f \in S_{a,k}$，则 $X(f)=0$. 首先注意[1)]

$$X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)\cdot 1+1\cdot X(1),$$

这蕴涵着对于任意常数 c，$X(c)=0$. 然而从引理 2.1.14 可以得到，若 $f \in S_{a,k}$，则

$$f-f(a)=\sum_{j=1}^n g_j h_j,$$

其中 $g_j, h_j \in \boldsymbol{m}_{a,k-1}$，因而[2)]

$$X(f)=\sum_{j=1}^n (X(g_j)h_j(a)+g_j(a)X(h_j))=0.$$

2.1.16 命题 若 V 是一个 C^∞ 流形，$a \in V$，则 $f \in C_{a,\infty}$ 在 a 处是平稳的，当且仅当 $f-f(a) \in (\boldsymbol{m}_{a,\infty})^2$ [理想 $\boldsymbol{m}_{a,\infty}$ 的平方]. 特别，$T_a^*(V)=\boldsymbol{m}_{a,\infty}/\boldsymbol{m}_{a,\infty}^2$.

这从引理 2.1.14 即得.

考察切向量的另一方法如下. 令 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的单位区间 $[0,1]$，

---

1) 原文将 $X(1\cdot 1)$ 误为 $X(1.1)$. ——译者注

2) 原文将和号 $\sum_{j=1}^n$ 误为 $\sum_{j=1}^n$. ——译者注

$\gamma: I \to V$ 是一条 C^k 曲线 (即，从 I 的一个邻域到 V 中的一个 C^k 映射). γ 在 $a = \gamma(0)$ 处的切向量是一个元素 $X = X_\gamma \in T_a(V)$，它由

$$X(f) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)|_{t=0}, \quad f \in C_{a,k}$$

所定义. 这直接定义了一个切向量. 此时,我们有:

2.1.17 命题 任何 $X \in T_a(V)$ 是一条适合 $\gamma(0) = a$ 的 C^k 曲线在 a 处的切向量.

证明 令 (U, φ) 是一个坐标系,使得 $a \in U$, $\varphi(a) = 0$ 和

$$\varphi(U) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid |x_j| < 1\}.$$

令 $X = \sum_{j=1}^{n} a_j(\partial/\partial x_j)_a$, $a_j \in \boldsymbol{R}$. 令 γ'_j 是 I 的一个邻域中的 C^k 函数,在 I 上 $|\gamma'_j(t)| < 1$, 当 t 在 0 的一个邻域中时, $\gamma'_j(t) = a_j t$. 我们可以取曲线 $\varphi^{-1} \circ \gamma'$ 为 γ, 其中 γ' 是由 $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \cdots, \gamma'_n(t))$ 所给出的映射.

§2.2. 切丛和余切丛

在本节中 V 表示一个 n 维的 C^k 流形 ($k \geq 1$). 令 W 是另一个 n 维的 C^k 流形, $f: V \to W$ 是一个 C^k 映射. 令 $b = f(a)$. 我们定义 $\boldsymbol{R}$ 线性映射[1]

$$f_{*,a}: T_a(V) \to T_b(W), \quad f_a^*: T_b^*(W) \to T_a^*(V)$$

如下: 若 $X \in T_a(V)$ 和 $g \in C_{b,k}(W)$, 则我们令

$$f_{*,a}(X)g = X(g \circ f).$$

[因为当 $g \in S_{b,k}(W)$ 时, $g \circ f \in S_{a,k}(V)$, 因而上述等式定义了 $T_b(W)$ 的一个元素]. 若 $\varphi \in C_{b,k}(W)$ 有像 $d\varphi = (d\varphi)_b \in T_b^*(W)$, 则我们定义

$$f_a^*(d\varphi) = d(\varphi \circ f)_a.$$

1) 原文将 $T_b(W)$ 误为 $T_a(W)$. ——译者注

[这个映射 $C_{b,k}(W)\to C_{a,k}(V)$ 定义了一个映射 $f_a^*: T_b^*(W)\to T_a^*(V)$，因为对任何 $\varphi\in S_{b,k}(W)$，有 $\varphi\circ f\in S_{a,k}(V)$.] 容易验证 f_* 和 f^* 互为转置(或伴随). f_* 称为 f 在 a 处的微分或切映射.

2.2.1 注 若 V_1, V_2, V_3 是 C^k 流形，$f_1: V_1\to V_2$，$f_2: V_2\to V_3$ 是 C^k 映射，则 $f_2\circ f_1 = f: V_1\to V_3$ 也是 C^k 映射，并且我们有

$$f_{*,a} = f_{2*,f_1(a)}\circ f_{1*,a},\quad f_a^* = f_{1,a}^*\circ f_{2,f_1(a)}^*.$$

因而，若 $f: V\to W$ 是一个 C^k 微分同胚，则 f_a^* 是一个从 $T_b^*(W)$ 到 $T_a^*(V)$ 上的同构 $(b = f(a))$. 把上面的公式应用于 $\mathrm{id}_V = f^{-1}\circ f$，$\mathrm{id}_W = f\circ f^{-1}$[1]. 因为由命题 2.1.11，$\dim V = \dim_{\boldsymbol{R}} T_a^*(V)$，因而我们得到：

2.2.2 推论 C^k 微分同胚的流形 $(k\geqslant 1)$ 有相同的维数（参阅注 2.1.4）.

若 V 是一个 C^k 流形，令

$$T(V) = \bigcup_{a\in V} T_a(V)$$

是 $T_a(V)$的不相交的并集. 存在一个自然的映射 $p: T(V)\to V$，它把每个 $\xi\in T_a(V)$ 映为点 a；即，p 是这样的映射，对于它，$p^{-1}(a) = T_a(V)$. 我们来证明下述定理.

2.2.3 定理 $T(V)$ 具有一个自然的 C^{k-1} 流形结构，关于此结构 p 是一个 C^{k-1} 映射. 这个结构由下述要求唯一确定：

任何 $a\in V$ 有一个邻域 U，使得存在一个 C^{k-1} 微分同胚 $h: p^{-1}(U)\to U\times\boldsymbol{R}^n$，它满足条件：若 π_1, π_2 分别表示从 $U\times\boldsymbol{R}^n$ 到第一个因子 U 和第二个因子 $\boldsymbol{R}^n$ 上的投影映射，则我们有 $\pi_1\circ h = p$，并且，$\pi_2\circ h | T_a(V)(a\in V)$ 是一个从 $T_a(V)$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的同构，这里 $T_a(V)$ 和 $\boldsymbol{R}^n$ 都作为 $\boldsymbol{R}$ 向量空间.

证明 令 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathscr{I}}$ 是 V 上的一个 C^k 结构，并令 $\varphi_i(x) = (x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$；诸 x_j 是 U_i 上的 C^k 函数. 我们已经知道，任何 $X\in T_a(V)$ 由 $a_\nu = X(x_\nu)$，$\nu = 1,\cdots,n$，所唯一确定(命题 2.1.11

---

1) id_V 表示从 V 到 V 的恒等映射. ——译者注

的证明)，并且 $X = \sum a_\nu(\partial/\partial x_\nu)_a$. 现在令 $(U_j, \varphi_j)(j\in\mathscr{I})$ 是另一个坐标系，$a\in U_j$. 对于 $x\in U_j$，我们令 $\varphi_j(x) = (y_1, \cdots, y_n)$. 我们知道 $a\in U_i\cap U_j$，并且 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $U_i\cap U_j$ 上的 C^k 函数. 若 $g\in C_{a,k}$，则我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a g &= \frac{\partial}{\partial y_\mu}(g\circ\varphi_j^{-1})(\varphi_j(a))\\ &= \frac{\partial}{\partial y_\mu}(g\circ\varphi_i^{-1}\circ\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(\varphi_j(a))\\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\nu}g\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a))\cdot\frac{\partial(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_\nu}{\partial y_\mu}(\varphi_j(a))\\ &\quad[\varphi_i\circ\varphi_j^{-1} = ((\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_1, \cdots)]^{1)}\\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a g\cdot b_{\mu\nu}(a),\end{aligned}$$

其中

$$b_{\mu\nu}(a) = \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a x_\nu,$$

因为我们可以立即验证

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a x_\nu = \frac{\partial(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_\nu}{\partial y_\mu}(\varphi_j(a)).$$

这样，我们就有

2.2.4 $$\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}(a)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a, \quad b_{\mu\nu}(a) = \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a x_\nu.$$

注意，$b_{\mu\nu}\in C^{k-1}(U_i\cap U_j)$. 若 $M_{ji}(a)$ 表示矩阵 $(b_{\mu\nu}(a))$，则我们有：对于所有的 $a\in U_i$，$M_{ii}(a) = I$ ($n\times n$ 单位矩阵)，对于 $a\in U_i\cap U_j$，$M_{ij}(a)M_{ji}(a) = I$，并且，若 $a\in U_i\cap U_j\cap U_l$，则 $M_{lj}(a)M_{ji}(a) = M_{li}(a)$[2]. 此外，若

$$X = \sum a_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a = \sum b_\mu\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a,$$

---

1) 原文将 $(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_1$ 误为 $(\varphi_i\circ\varphi_j)_1^{-1}$. ——译者注

2) 为了避免与定理叙述中的 k 相混淆，这里我们把原文中的足标 k 改为 l. ——译者注

则我们有

2.2.5 $$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) M_{ji}(a).$$

现在考虑 $T(V)$ 的覆盖 $\{p^{-1}(U_i)\}_{i\in\mathscr{I}}$. 对于每个 i, 我们定义一个映射

$$h_i: p^{-1}(U_i) \to U_i \times \boldsymbol{R}^n$$

如下. 令 $\varphi_i = (x_1, \cdots, x_n)$ 是相应于 U_i 的坐标, $X \in T_a(V)$, $a \in U_i$. 我们令 $X = \sum a_\nu (\partial/\partial x_\nu)_a$, 以及 $v = (a_1, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$. 然后我们令

$$h_i(X) = (a, v).$$

显然, 在 $p^{-1}(U_i)$ 上 $p = \pi_1 \circ h_i$, 并且, $\pi_2 \circ h_i | T_a(V)$ 是一个从 $T_a(V)$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的向量空间同构映射. 因而, h_i 是一个双满映射. 并且, 若 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, 则映射

$$h_j \circ h_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \boldsymbol{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \boldsymbol{R}^n$$

由

$$h_j \circ h_i^{-1}(x, v) = (x, v M_{ji}(x))$$

所给出[由于(2.2.5)], 因而是一个 C^{k-1} 映射, 特别, 它是连续的. 因此在 $T(V)$ 上存在一个唯一的拓扑, 对于这个拓扑, $p^{-1}(U_i)$ 是开集, h_i 是一个同胚; 此时映射 $p: T(V) \to V$ 是连续的. 显然 (因为 p 是连续的, 每个 $p^{-1}(U_i)$ 是 Hausdorff 的) $T(V)$ 是 Hausdorff 的.

此外, 因为诸映射 $h_j \circ h_i^{-1}$ 是 C^{k-1} 的, 因而族 $\{p^{-1}(U_i), h_i\}$ 将 $T(V)$ 做成一个 C^{k-1} 流形. 由其构造法可以看出这是显然的, 即定理 2.2.3 中所述的其它性质也被满足.

注 $T(V)$ 是实向量丛(参阅 §3.1) 的一个例子.

用同样的方法我们可以证明下述结果:

2.2.6 定理 集合

$$T^*(V) = \bigcup_{a\in V} T_a^*(V)$$

具有一个自然的 C^{k-1} 流形结构.

$T(V)$ 和 $T^*(V)$ 的维数是 $2n$. 又一次发生这样的情形, 即,

V 的任何一点有一个邻域 U，使得 $\bigcup_{a\in U} T_a^*(V)$ 微分同胚于乘积 $U \times \boldsymbol{R}^n$，并具有定理 2.2.3 中所述的那些性质.

2.2.7 定义 三元组 $(T(V), p, V)$ 称为 V 的切丛，这里 p 是自然的投影映射. 若 $p^*: T^*(V) \to V$ 表示自然的投影映射（它把 $T_a^*(V)$ 映到 $\{a\}$ 上），则三元组 $(T^*(V), p^*, V)$ 称为 V 的余切丛.

我们将经常谈到 $T(V)$ 和 $T^*(V)$ 分别作为切丛和余切丛，这既意味着相应的空间，又意味着上述三元组.

我们注意，当 V 是一个实解析流形时，$T(V)$，$T^*(V)$ 实际上也是实解析流形，并且，可以选取对 V 的投影映射以及与 $U \times \boldsymbol{R}^n$ 之间的局部同构映射为实解析映射.

下面我们可以得到另一个要用到的"丛". 令 $0 \leqslant p \leqslant n$. 我们考虑向量空间 $T_a^*(V)$ 的 p 次外幂，通常我们用 $\wedge^p T_a^*(V)$ 表示. 令 (U, φ) 是一个坐标系，$a \in U$，$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$. 则 $(dx_1)_a, \cdots, (dx_n)_a$ 构成 $T_a^*(V)$ 的一个 $\boldsymbol{R}$ 基［参阅命题 2.1.11′］. 因而，$\wedge^p T_a^*(V)$ 的一个基由元素组

$$(dx_{j_1})_a \wedge \cdots \wedge (dx_{j_p})_a, \quad j_1 < \cdots < j_p$$

给出. 我们令

$$\wedge^p T^*(V) = \bigcup_{a \in V} \wedge^p T_a^*(V).$$

$\wedge^p T_a^*(V)$ 的一个元素称为 a 处的一个 p-余向量. 如定理 2.2.3 和 2.2.6 一样，我们有下述定理:

2.2.8 定理 $\wedge^p T^*(V)$ 具有一个维数为 $n + \binom{n}{p}$ 的自然的 C^{k-1} 流形结构.

$\wedge^p T^*(V)$ 称为 V 上的 p-形式丛. 用同样的方式定义 V 上的复值 p-形式丛 $\wedge^p \mathfrak{T}^*(V)$.

2.2.9 定义 令 V 和 W 是 C^k 流形，$k \geqslant 1$，$f: V \to W$ 是一个 C^k 映射. 如果 $\operatorname{rank}\{f_{*,a}: T_a(V) \to T_{f(a)}(W)\} = r$，则 f 称为在 $a \in V$ 处有秩 r.

我们现在用局部坐标来计算映射 $f_{*,a}$. 令 $b=f(a)$,并令(U,φ) 是V上的一个坐标系, $a\in U$, (U',φ') 是W上的一个坐标系, $b\in U'$, 使得 $f(U)\subset U'$. 对于 $x\in U$, 我们记 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$, 对于 $y\in U'$, 我们记 $\varphi'(y)=(y_1,\cdots,y_n)$. 它们分别产生 $T_a(V)$ 的一个基 $(\partial/\partial x_\nu)_a$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, 和 $T_b(W)$ 的一个基 $(\partial/\partial y_\mu)_b$, $1\leqslant\mu\leqslant m$[1]. 令

$$X\in T_a(V),\quad X=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a,$$

并令

$$f_{*,a}(X)=\sum_{\mu=1}^{m}b_\mu\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_b.$$

若 $g\in C_{b,k}$, 则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{m}b_\mu\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_b g&=X(g\circ f)\\&=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_b g\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a f_\mu,\end{aligned}$$

其中 $f_\mu=y_\mu\circ f$. 这说明了 $f_{*,a}$ 被线性变换

$$(a_1,\cdots,a_n)\longmapsto(b_1,\cdots,b_m)$$

所表示,其中

$$b_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a f_\mu.$$

如果我们用 F 表示从 $\varphi(U)$ 到 $\varphi'(U')$ 中的映射 $\varphi'\circ f\circ\varphi^{-1}$, 则这就是映射 $(dF)(\varphi(a))$ (参阅(1.3.1)).

由于这个注记,我们从第一章的结果就得到下述定理.

2.2.10 逆函数定理 若 V,W 是 n 维的 C^k(实解析)流形, $f:V\to W$ 是一个 C^k(实解析)映射,并且如果对于某个 $a\in V$, $f_{*,a}:T_a(V)\to T_{f(a)}(W)$ 是一个同构, 则存在 a 的一个邻域 U 和 $f(a)$ 的一个邻域 U', 使得 $f|U$ 是一个到 U' 上的 C^k(实解析)同构.

2.2.11 秩定理 令 V, W 分别是 n 维和 m 维的 C^k (实解析) 流

1) 原文将 $(\partial/\partial y_\mu)_b$ 误为 $(\partial/\partial y_\mu)$. ——译者注

形，并假设 f 在每个点 $a\in V$ 处的秩是一个与 a 无关的整数 r，则存在 a 和 $f(a)$ 的坐标系 (U,φ) 和 (U',φ')，使得 $\varphi'\circ f\circ\varphi^{-1}|\varphi(U)$ 是映射

$$(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0).$$

2.2.12 定义 令 V 是一个 n 维的 C^1 流形，它有一个可数基．令 $S\subset V$．则 S 称为有零测度，如果对于任何坐标系 (U,φ)，$\varphi(S\cap U)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有零测度．

如在第一章中一样，我们可以定义临界点．令 V，W 分别是 n 维和 m 维的 C^k 流形，$k\geqslant 1$，并令 $f:V\to W$ 是一个 C^k 映射．若 f 在点 $a\in V$ 处的秩 $<m$，则点 a 称为临界的．

从定理 1.4.6 立刻得到下述定理．

2.2.13 Sard 定理 若 V，W 是两个具有可数基的 C^∞ 流形，且若 $f:V\to W$ 是一个 C^∞ 映射，则 f 的临界点集合 A 的像 $f(A)$ 在 W 中有零测度．

最后，如在 §1.2 中一样，我们可以证明单位分解的存在性．若 (U,φ) 是 C^k 流形 V 上的一个坐标系，则从引理 1.2.5 立即得到，若 K 是 U 的一个紧子集，则存在一个 V 上的 C^k 函数 $\eta\geqslant 0$，使得当 $x\in K$ 时 $\eta(x)>0$，并且 $\mathrm{supp}(\eta)\subset U$．那么，正如我们证明定理 1.2.3 一样，我们可以证明下述定理：

2.2.14 定理 假设给定 C^k 流形 $V(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 的一个开覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathscr{I}}$，并假设 V 有可数基，则存在一族 C^k 函数 $\{\eta_i\}_{i\in\mathscr{I}}$，$\eta_i\geqslant 0$，$\mathrm{supp}(\eta_i)\subset V_i$，使得集合族 $\{\mathrm{supp}(\eta_i)\}$ 是局部有限的，并且对于任何 $x\in V$，有 $\sum\eta_i(x)=1$．

2.2.15 推论 若 X 是 V 中的一个闭集，$U\supset X$ 是一个开集，则存在 V 上的一个 C^k 函数 η，使得当 $x\in X$ 时 $\eta(x)=1$，当 $x\in V-U$ 时 $\eta(x)=0$．

§2.3. Grassmann 流形

在这一节中我们给出实(和复)解析流形的一类具有多方面重

要性的例子，虽然在本书余下的部分中并不用到它们.

令 E 是一个 $\boldsymbol{R}$ 上的 n 维向量空间. 令 r 是一个整数，$0<r<n$. 我们用 $G_r(E)$ 表示 E 的 r 维线性子空间的集合. 我们将证明，$G_r(E)$ 具有一个自然的实解析流形结构.

令 F 是任意一个 r 维子空间，则我们可以找到 E 的一个 $n-r$ 维子空间 E'，使得 $F\cap E'=\{0\}$. 因而我们有 $E=F+E'$. 所以，若对于 E 的一个 $n-r$ 维子空间 E'，我们令

$$U(E')=\{F \mid \dim F=r, F\subset E, F\cap E'=\{0\}\},$$

则

$$G_r(E)=\bigcup_{E'} U(E').$$

现在我们断言，可以把 $U(E')$ 等同于使得 $\eta_{E'}\circ\lambda$ 为恒等映射的所有 $\boldsymbol{R}$ 线性映射 $\lambda:E/E'\to E$ 的集合 $L(E')$，其中 $\eta_{E'}:E\to E/E'$ 是自然的投影映射. 事实上，若 $\lambda\in L(E')$，则我们显然有：$\lambda(E/E')=F$ 是 E 的一个 r 维子空间，满足 $F\cap E'=\{0\}$. 反之，若给出 F，则

$$E=F+E'.$$

用 π_F 表示由分解 $E=F+E'$ 所给出的对于 F 的投影映射，则

$$\pi_F(E')=0,$$

因而导出一个 $\boldsymbol{R}$ 线性映射

$$\lambda_F':E/E'\to F,$$

因而导出一个映射

$$\lambda_F:E/E'\to E.$$

显然，

$$\eta_{E'}\circ\lambda_F=\text{恒等映射},$$

并且，

$$\lambda_F(E/E')=F.$$

这就证明了可以把 $U(E')$ 和 $L(E')$ 自然地等同起来. 其次，我们断言，$L(E')$ 是一个有限维仿射空间，即，对于任何 $\lambda_0\in L(E')$，集合 $\{\lambda-\lambda_0 \mid \lambda\in L(E')\}$ 是一个有限维向量空间. 事实上，若 λ_0，$\lambda\in L(E')$，则 $\eta_{E'}\circ(\lambda-\lambda_0)=0$，因而

$$(\lambda-\lambda_0)(E/E')\subset\ker(\eta_E)=E'^{1)},$$

所以 $\lambda-\lambda_0$ 是一个从 E/E' 到 E' 中的 $\boldsymbol{R}$ 线性映射，即[2]

$$\lambda-\lambda_0\in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E/E',E').$$

再者，若 $\mu\in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E/E',E')$，则 $\lambda_0+\mu\in L(E')$. 这证明了 $\{\lambda-\lambda_0|\lambda\in L(E')\}$ 自然地同构于 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E/E',E')$，这就证明了我们的结论. 如果我们选取 E' 的一个基，并将其完备为 E 的一个基，则我们可以将 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E/E',E')$ 等同于集合 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^r,\boldsymbol{R}^{n-r})=M(r,n-r)$，这里，$M(r,n-r)$ 是 $r\times(n-r)$矩阵的集合，它 $\simeq\boldsymbol{R}^{r(n-r)}$[3].

这样，给定 $\lambda_0\in U(E')$ 和 E' 及 E 的适当的基，则存在一个从 $U(E')$ 到 $\boldsymbol{R}^{r(n-r)}$ 上的双满映射 $h_{E'}$.

再者，容易证明，对于两个 $n-r$ 维的子空间 E'，E''，从 $h_{E'}(U(E')\cap U(E''))$到$\boldsymbol{R}^{r(n-r)}$ 中的映射 $h_{E''}\circ h_{E'}^{-1}$ 是由有理函数(特别，实解析函数)所给出的. 因而得到，在 $G_r(E)$ 上存在一个唯一的拓扑，关于此拓扑，$U(E')$ 是开集，映射 $h_{E'}$ 是同胚.

我们断言，这个拓扑是 Hausdorff 的. 首先，对于任何 E'，$U(E')$ 是 Hausdorff 的并为开集. 并且，给定两个 r 维子空间 F_1，$F_2\subset E$，我们可以找到一个 $n-r$ 维的子空间 E'，使得 $F_1\cap E'$，$F_2\cap E'$ 都为$\{0\}$，因而 F_1，$F_2\in U(E')$. 由此即得，若 $F_1\neq F_2$，则它们在 $U(E')$ 中，因而在 $G_r(E)$ 中有不相交的邻域.

在说明了这些以后，我们就证明了 $G_r(E)$ 具有一个实解析流形的结构. 最后我们证明，它是紧的.

令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 E 的一个基[4]，并令 $O(n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正交群，即，所有使得

$$A\cdot{}^tA=I$$

的 $n\times n$ 实矩阵 A 的集合，其中 ${}^tA$ 表示矩阵 A 的转置，I 是 $n\times n$

---

1) $\mathrm{Ker}(\eta_E)$ 表示映射 η_E 的核. ——译者注

2) $\mathrm{Hom}_R(E,F)$ 表示从 E 到 F 的所有 $\boldsymbol{R}$ 线性映射的集合. ——译者注

3) 这里的记号“$\simeq$”表示同构. ——译者注

4) 原文将 E 误为 E_1.——译者注

单位矩阵. 我们有一个用

$$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n) \quad 若 \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

所给出的同构 $\varphi: E \to \mathbf{R}^n$. 因而 $O(n)$ 作用于 E 上;若 $A \in O(n)$, $x \in E$, 我们令

$$A(x) = \varphi^{-1} \cdot A \cdot \varphi(x),$$

其中 $A \cdot \varphi(x)$ 是 $O(n)$ 在 R^n 上通常的作用. 因而它也作用于 $G_r(E)$ 上. 我们断言, 对于给定的 $F_1, F_2 \in G_r(E)$, 存在一个 $A \in O(n)$,使得 $A \cdot F_1 = F_2$. 我们只需对于 $E = \mathbf{R}^n$ 证明此事实即可,然而这是显然的 [因为我们可以选取 $\mathbf{R}^n$ 的两个正交基 $(u_1, \cdots, u_n)$ 和 $(v_1, \cdots, v_n)$, 使得 F_1 是由 $(u_1, \cdots, u_r)$ 张成的空间, F_2 是由 $(v_1, \cdots, v_r)$ 张成的空间]. 并且,由 $(A, F) \to A \cdot F$ 给出的映射 $O(n) \times G_r(E) \to G_r(E)$ 是连续的. 此外, $O(n)$ 是紧的.若 $F \in G_r(E)$ 是固定的[1],则 $G_r(E)$是 $O(n)$在连续映射 $A \mapsto A \cdot F$ 下的像,因而是紧的. 这样,我们就证明了:

2.3.1 定理 Grassmann 流形 $G_r(E)$ 是一个 $r(n-r)$维的紧实解析流形.

2.3.2 注 在 $r = 1$ 的情形, $G_1(E)$ 称为相伴于 E 的射影空间 $\boldsymbol{P}(E)$; $\boldsymbol{P}(E)$ 的维数为 $n-1$. 特别, 若 $E=\mathbf{R}^n$, 则我们用 $\boldsymbol{RP}^{n-1}$ 表示 $\boldsymbol{P}(\mathbf{R}^n)$.

2.3.3 注 若 E 是一个 n 维复向量空间, $o < r < n$, 则我们用 $\mathscr{G}_r(E)$ 表示 E 的复 r 维子空间的集合. 用如上面相同的方法,我们可以证明: $\mathscr{G}_r(E)$ 是一个复维数为 $r(n-r)$ 的紧的复流形. 在 $r = 1$ 的情形, $\mathscr{G}_1(E)$ 称为 E 的射影空间 $\boldsymbol{P}(E)$, 若 $E = \boldsymbol{C}^n$, 我们用 $\boldsymbol{CP}^{n-1}$ 表示 $\boldsymbol{P}(E)$.

§2.4. 向量场和微分形式

令 V 是一个 C^k 流形, $T(V)$是它的切丛. 存在一个自然的投

1) 原文将 $F \in G_r(E)$ 误为 $F_0 \in G_r(E)$.——译者注

影映射 $p: T(V) \to V$，它把 $T_a(V)$ 映为点 a.

2.4.1 定义 V 上的一个向量场是一个映射 $X: V \to T(V)$，使得 $p \circ X = \mathrm{id}_V$. 若 X 是一个 C^r 映射 $(0 \leqslant r \leqslant k-1)$，我们说 X 是一个 C^r 向量场. 若 V 是一个解析流形，则我们可以类似地定义解析向量场.

一般地，若 $p: B \to A$ 是从集合 B 到集合 A 上一个映射，则使得 $p \circ X = \mathrm{id}_A$ 的一个映射 $X: A \to B$ 称为 p 的一个截面. 这样，向量场就是从切丛到流形上的投影映射的截面.

若 X 是一个向量场，(U, φ) 是一个坐标系，$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，则我们可以写为

$$X(a) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(a) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a, \quad \xi_\nu(a) \in \boldsymbol{R}.$$

容易验证：X 是一个 C^r 向量场，当且仅当对于任意的坐标系 (U, φ)，诸 ξ_ν 是 U 上的 C^r 函数. 我们用 $\partial/\partial x_\nu$ 表示向量场 $a \mapsto (\partial/\partial x_\nu)_a$. 令 p 是一个整数，$0 \leqslant p \leqslant n$，$\wedge^p T^*(V)$ 是 V 上的 p-形式丛.

2.4.2 定义 一个 p 次的微分形式（或者简称为一个 p-形式）是一个映射 $\omega: V \to \wedge^p T^*(V)$，使得对于任何 $a \in V$，我们有

$$\omega(a) \in \wedge^p T_a^*(V).$$

一个 p-形式是 C^r 的（解析的），若映射 ω 是 C^r 的（解析的）. 这样，微分形式就是从 $\wedge^p T^*(V)$ 到 V 上的投影映射的截面.

若 (U, φ) 是一个坐标系，$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，则元素组 $(dx_1)_a, \cdots, (dx_n)_a$ 构成 $T_a^*(V)$ 的一个基，而元素组 $(dx_{i_1})_a \wedge \cdots \wedge (dx_{i_p})_a (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n)$ 给出 $\wedge^p T_a^*(V)$ 的一个基. 因而，一个 p-形式有一个唯一的表示

$$\omega(a) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \xi_{i_1 \cdots i_p}(a) (dx_{i_1})_a \wedge \cdots \wedge (dx_{i_p})_a.$$

并且，ω 是 C^r 的（解析的），当且仅当对于所有的坐标系 (U, φ)，诸 $\xi_{i_1 \cdots i_p}$ 是 C^r 的（解析的）. 我们用 dx_j 表示 1-形式

$$a \mapsto (dx_j)_a,$$

用 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ 表示 p-形式

$$a\mapsto(dx_{i_1})_a\wedge\cdots\wedge(dx_{i_p})_a.$$

注意，对于整数 $p,q\geqslant 0$，我们有一个自然的线性映射

$$\wedge^p T_a^*(V)\otimes\wedge^q T_a^*(V)\to\wedge^{p+q}T_a^*(V);$$

我们用 $\omega_1(a)\wedge\omega_2(a)$ 表示 $\omega_1(a)\otimes\omega_2(a)$ 在这个映射下的像. 给定两个分别为 p 次，q 次的微分形式 ω_1，ω_2，我们可以用

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(a)=\omega_1(a)\wedge\omega_2(a)$$

定义一个 $(p+q)$-形式 $\omega_1\wedge\omega_2$，它被称为 ω_1 和 ω_2 的外积. 显然，若 ω_1，ω_2 是 C^r 的(解析的)，则 $\omega_1\wedge\omega_2$ 也是 C^r 的(解析的).

我们用 $A^p(V)$ 表示 V 上所有 (C^{k-1} 的) p-形式的集合. 我们还考虑直接和

$$A(V)=\sum_{p\geqslant 0}A^p(V).$$

上面所定义的外积将 $A(V)$ 转化为一个 $\boldsymbol{R}$ 代数. $A(V)$ 的元素称为**微分形式**. 它的分量是 p-形式，除了有限多个分量外，其余的分量都是 0.

在局部坐标中的公式蕴涵着，若 V C^k 微分同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，则作为一个代数，$A(V)$ 由形如 f, dg 的元素所生成，其中 $f\in C^{k-1}(V)$，$g\in C^k(V)$.

我们注意，若 R 是 V 上 C^{k-1} 函数的环，则 V 上 C^{k-1} 向量场的 $\boldsymbol{R}$ 向量空间 $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(V)$ 也是一个 R-模. 在 $\wedge^p T_a^*(V)$ 和 $\wedge^p T_a(V)$ 之间有一个配对，它使这两个空间相互对偶. 因而，若 ω 是 V 上的一个 C^{k-1} p-形式，则由公式

$$\omega(X_1,\cdots,X_p)(a)=\omega(a)(X_1(a),\cdots,X_p(a))$$

定义了一个从 $\mathfrak{X}^p$ 到 R 中的多重线性映射. 这个映射是交错的和 R 多重线性的(这是显然的)[1].

2.4.3 命题 反之，从 $\mathfrak{X}^p$ 到 R 中的任意一个交错的，R 多重线性

1) 所谓交错的，即，若将 X_i,X_j 互换就产生一个负号.——译者注

映射 φ 定义一个 C^{k-1} p-形式 ω.

证明 为了证明命题,令 $X_{1,a}, \cdots, X_{p,a} \in T_a(V), a \in V$.我们首先断言,存在 C^{k-1} 向量场 $X_1, \cdots, X_p$, 使得 $X_j(a) = X_{j,a}(j = 1, \cdots, p)$. 为了证明这个结论,我们假设对于某个坐标系$(U,\varphi)$ $(a \in U)$, $X_{j,a} = \sum a_\nu(\partial/\partial x_\nu)_a$, 并令 η 是一个具有紧支集 $\text{supp}(\eta) \subset U$ 的 C^k 函数,当 x 在 a 的一个邻域中时 $\eta(x)=1$(推论2.2.15).我们可以用

$$X_j(x) = 0 \quad x \notin U,$$

$$X_j(x) = \sum \eta(x) \cdot a_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x \qquad x \in U$$

来定义 $X_j: V \to T(V)$. 其次,我们断言,若对于某个 $j, X_j(a)=0$, 则我们有 $\varphi(X_1, \cdots, X_p)(a) = 0$.为此,因为 φ 是 R 多重线性的,所以我们只需证明: 若 $X_j(a) = 0$, 则 $X_j = \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu Y_\mu$, 其中 $\eta_\mu \in C^{k-1}(V)$, $\eta_\mu(a) = 0$, $Y_\mu \in \mathfrak{X}$. 令 (U, ϕ) 是一个坐标系[1], $a \in U$, 并令

$$X_j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \qquad x \in U.$$

因为 $X_j(a)=0$, 所以我们有 $a_\nu(a)=0$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. 令 $\eta \in C^{k-1}(V)$, 使得 $\eta(a) = 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, 并且 $\text{supp}(\eta)$ 是U的一个紧子集(参阅推论 2.2.15). 我们定义向量场 Z_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, 如下:

$$Z_\nu(x) = 0, \text{ 若 } x \notin U,$$

$$Z_\nu(x) = b_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \text{ 若 } x \in U,$$

其中

$$b_\nu(x) = \begin{cases} \eta(x) \cdot a_\nu(x), & x \in U; \\ 0, & x \notin U, \end{cases}$$

因而 $b_\nu \in C^{k-1}(V)$, 并且 $b_\nu(a) = 0$. 我们用

---

1) 为了避免与命题叙述中的 φ 混淆,我们将文中的 (U,φ) 改为 (U, ϕ).——译者注

$$Y_\nu(x) = 0, \text{ 若 } x \notin U,$$

$$Y_\nu(x) = \eta(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \text{若 } x \in U$$

定义向量场 Y_ν，则我们有

$$X_i = \sum_{\nu=1}^{n} \{b_\nu Y_\nu + (1-\eta)Z_\nu\} + (1-\eta)X_i.$$

因为 $\eta(a) = 1$ 和 $b_\nu(a) = 1$，因此这就具有我们所要求的形式。

现在对于任何 $a \in V$，我们用

$$\omega(a)(X_{1,a}, \cdots, X_{p,a}) = \varphi(X_1, \cdots, X_p)(a)$$

定义 $\omega(a)$. 由于上面第二个断言，若某一 X_i 在 a 处为 0，则 $\omega(a)(X_{1,a}, \cdots, X_{p,a}) = 0$，因而 $\omega(a)$ 的定义与适合 $X_i(a) = X_{i,a}$ 的诸 X_i 的选取无关. 在局部坐标中的一个简单的计算指出，如此定义的 $\omega(a) \in \wedge^p T_a^*(V)$ 定义了一个 C^{k-1} p-形式 ω. 注意，一个 (C^k, 解析的) 0-形式就是 V 上的一个 (C^k, 解析的)函数.

现在令 V, W 是两个 C^k 流形，$f: V \to W$ 是一个 C^k 映射. 令 $a \in V$ 和 $f(a) = b$. 我们曾定义了一个映射

$$f_a^*: T_b^*(W) \to T_a^*(V).$$

若 $p > 0$，它可"开拓"为一个线性映射

$$f_a^*: \wedge^p T_b^*(W) \to \wedge^p T_a^*(V).$$

这就给出了一个代数同态，我们将其仍记为 f_a^*:[1]

$$f_a^*: \wedge T_b^*(W) \to \wedge T_a^*(V).$$

2.4.4 定义 当 ω 是 W 上的一个 C^{k-1} p-形式时，我们如下地定义 V 上的一个 C^{k-1} p-形式 $f^*(\omega)$，我们称它为 ω 的拉回（或者逆像）：若 $p = 0$，$\omega = g$ 是一个 C^{k-1} 函数，我们令 $f^*(\omega) = g \circ f$. 若 $p > 0$，我们令

$$f^*(\omega)(a) = f_a^*(\omega(f(a))).$$

注意，上述 f^* 在所有微分形式的空间上所诱导的映射（仍记为 f^*）

---

1) $\wedge T_a^*(V)$ 是直接和 $\sum_{p \geq 0} \wedge^p T_a^*(V)$.——译者注

$$f^*: A(W) \to A(V)$$

是一个**代数同态**.

若 U 是 C^k 流形 V 中的一个开集, $i: U \to V$ 是内射映射[1], 则若 ω 是 V 上的一个 p-形式时, 我们就写为 $i^*(\omega) = \omega|U$, 并称它为 ω 在 U 上的限制[2].

2.4.5 注 对于任何 $a \in V$, 我们也有映射 $f_{*,a}: T_a(V) \to T_b(W)$ $(b = f(a))$. 然而, 一般地它不能"开拓"为一个映射 $\mathfrak{X}(V) \to \mathfrak{X}(W)$; 例如, 当 $X \in \mathfrak{X}(V)$, a, a' 是 V 中不相同的两点[3], 满足 $f(a) = f(a') = b$, 但是 $f_{*,a}(X(a)) \neq f_{*,a'}(X(a'))$ 时就是这样的情形. 然而,若 $f: V \to W$ 是一个 C^k 微分同胚,则显然,映射

$$b \longmapsto f_{*,a}(X(a)), \quad a = f^{-1}(b)$$

是W上的一个 C^{k-1} 向量场 $f_*(X)$:

现在令 V 是一个 C^k 流形, $k \geq 2$. 令 X 和 Y 是 V 上的两个 C^{k-1} 向量场. 对于任何 $f \in C^k(V)$, $X(f)$ 是一个 $C^{k-1}(V)$ 中的函数. 因为 $k-1 \geq 1$, 因此我们可以将 Y 作用于 $X(f)$ (参阅注 2.1.13). 这样,我们就可以用

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

定义一个映射 $C^k(V) \to C^{k-2}(V)$. 用局部坐标的语言来表示, 若 (U, φ) 是一个坐标系, $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$, 则我们有

$$X(x) = \sum a_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \quad Y(x) = \sum b_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x,$$

其中

$$a_\nu, b_\nu \in C^{k-1}(U);$$

容易验证:

$$[X, Y](f)(x) = \sum c_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x,$$

其中

---

1) 这里, $i: U \longrightarrow V$ 是内射映射意指对于任何 $a \in U$, $i(a) = a$.——译者注

2) 原文将这里的 U 误为 V.——译者注

3) 原文将这里的 V 误为 X.——译者注

$$c_\nu(x) = \sum_\mu \left\{a_\mu(x)\frac{\partial b_\nu}{\partial x_\mu} - b_\mu(x)\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}\right\}.$$

这又证明了 $[X, Y]$ 是一个 C^{k-2} 向量场.

向量场 $[X, Y]$ 称为向量场 X, Y 的 Poisson **括号**(或者,**括号**).

注意, $[X, Y](a)$ 依赖于 X 和 Y 在 a 的一个整个的邻域中的值,而不只是依赖于 $X(a)$ 和 $Y(a)$. 显然,我们有 $[X, X] = 0$, $[X, Y] = -[Y, X]$. 容易验证,如果 $k \geqslant 3$, X, Y, Z 是三个 C^{k-1} 向量场,则我们有

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

此式称为 Jacobi **恒等式**. 注意,若 X_ν 是由

$$X_\nu(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n$$

所定义的在一个坐标邻域 U 中的向量场,则对于任何一对 μ, ν, 在 U 中我们有 $[X_\nu, X_\mu] = 0$.

2.4.6 现在我们考虑复流形的切空间及其它对象. 令 V 是一个复维数为 n 的复流形,并令 $a \in V$. 令 (U, φ) 是一个坐标系, $a \in U$; 则 φ 是一个从 U 到 $\boldsymbol{C}^n$ 中一个开集上的复解析同构; 对于 $z \in U$, $z_j = x_j + iy_j$, 我们记 $\varphi(z) = (z_1, \cdots, z_n)$, 其中诸 x_j, y_j 是实值 C^∞ 函数. 则当把 V 看作一个 $2n$ 维的实 C^∞ 流形时, 切空间 $T_a(V)$ 有一个自然的复向量空间结构,这个结构是如下得到的:利用同构映射

$$(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n),$$

我们考虑 $\boldsymbol{C}^n \simeq \boldsymbol{R}^{2n}$, 其中 $z_j = x_j + iy_j$, 则由

$$X \longmapsto ((dx_1)_a(X), (dy_1)_a(X), \cdots, (dx_n)_a(X), (dy_n)_a(X))$$

定义的映射 $T_a(V) \to \boldsymbol{R}^{2n}$ 是一个 $\boldsymbol{R}$ 同构. 因而映射

$$X \longmapsto ((dz_1)_a(X), \cdots, (dz_n)_a(X))$$

是从 $T_a(V)$ 到 $\boldsymbol{C}^n$ 上的一个 $\boldsymbol{R}$ 同构, 它使 $T_a(V)$ 成为一个 $\boldsymbol{C}$ 向量空间(注 2.1.12). $T_a(V)$ 上的这个复结构与坐标系 (U, φ) 的选取无关. 事实上,它由下述性质所刻划. 若 f 是一个在 $a \in V$

处的全纯函数芽，则我们有

$$(df)_a(\zeta X) = \zeta \cdot (df)_a(X), \ \zeta \in \boldsymbol{C}, X \in T_a(V),$$

其中 ζX 表示由 $T_a(V)$ 上的复结构给出的运算，右端的项是两个复数的乘积．若如前所述，$\varphi(z) = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 U 中的复坐标，$z_j = x_j + iy_j$，则当我们将 V 看作为一个实 C^∞ 流形时，$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ 就构成 U 中的坐标．这样，我们就有向量

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a, \ \left(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_a \in T_a(V).$$

容易验证，关于 $T_a(V)$ 上的上述的复结构，我们有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_a = -\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a.$$

并且，$(\partial/\partial x_\nu)_a z_\mu = \delta_{\mu\nu}$，因而 $(\partial/\partial x_\nu)_a (1 \leqslant \nu \leqslant n)$ 构成 $T_a(V)$ 的一个 $\boldsymbol{C}$ 基．

现在令 (U', φ') 是另一个坐标系，$a \in U'$，$\varphi'(z) = (w_1, \cdots, w_n)(z \in U')$．我们记 $w_j = u_j + iv_j$，其中诸 u_j, v_j 是实 C^∞ 函数．

令 $X \in T_a(V)$，并且[1]

$$X = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a = \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu \left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\right)_a, \ a_\nu, b_\mu \in \boldsymbol{C}.$$

容易验证，我们有

$$b_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a w_\mu.$$

并且，对于 $a \in U \cap U'$，诸函数 $(\partial/\partial x_\nu)_a w_\mu$ 是 a 的全纯函数．因而，我们可以重复定理 2.2.3 的证明来证明下述定理：

2.4.7 定理 若 V 是一个 n 维复流形，则 $T(V) = \bigcup T_a(V)$ 具有一个自然的 $2n$ 维复流形的结构．投影映射 $p: T(V) \to V$ 是全纯的，$T(V)$ 是局部平凡的，即，任意 $a \in V$ 有一个邻域 U，使得存在一个复解析同构 $h: p^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{C}^n$，若 $h(\xi) = (a, v)$ $(\xi \in p^{-1}(U))$，则有 $p(\xi) = a$．此外，由 $\xi \longmapsto v$ 给出的映射 $T_a(V) \to \boldsymbol{C}^n$ 是一个 $\boldsymbol{C}$-同构．

1) 原文将 $a_\nu, b_\mu \in \boldsymbol{C}$ 误为 $a_\nu, b_\mu \in T_a(V)$．——译者注

2.4.8 注 若 V, W 是两个复流形，$f:V \to W$ 是一个全纯映射，则映射 $f_{*,a}:T_a(V) \to T_{f(a)}(W)$ 是一个 $\boldsymbol{C}$ 线性映射[1]。

我们注意，由于上面一些说明，我们可以应用全纯函数的秩定理(参阅注 1.3.15)，因而得到：

2.4.9 全纯映射的秩定理 令 V, W 分别是 n 维，m 维复流形，f: $V \to W$ 是一个全纯映射. 令 r 是一个整数，使得对于每个 $a \in V$，

$$\operatorname{rank}_{\boldsymbol{C}} f_{*,a} = r^{2)}.$$

则存在 a 处的复坐标系 (U, φ) 和 $f(a)$ 处的复坐标系 (U', φ')，使得 $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} | \varphi(U)$ 是映射 $(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (z_1, \cdots, z_r, 0, \cdots, 0)$.

2.4.10 注 关于一个复流形 V 上的复值 C^∞ 微分形式，我们作几个注记. 由映射

$$(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n),$$

其中 $z_j = x_j + iy_j$，我们曾将 $\boldsymbol{C}^n$ 等同于 $\boldsymbol{R}^{2n}$. 令 E 是一个 $\boldsymbol{C}$ 上的 n 维向量空间. 考虑从 E 到 $\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{R}$ 线性映射的 $\boldsymbol{C}$ 向量空间

$$\mathscr{E}^* = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E, \boldsymbol{C}).$$

令

$$F = \{f \in \mathscr{E}^* | f(iv) = if(v) \quad \text{对于所有的 } v \in E\},$$

$$\bar{F} = \{f \in \mathscr{E}^* | f(iv) = -if(v) \quad \text{对于所有的 } v \in E\}.$$

显然，F, $\bar{F}$ 是 $\mathscr{E}^*$ 的 $\boldsymbol{C}$ 子空间，并且我们有

$$\mathscr{E}^* = F \oplus \bar{F}.$$

事实上，$F \cap \bar{F} = \{0\}$；若 $g \in \mathscr{E}^*$，我们令

$$f'(v) = \frac{1}{2}(g(v) - ig(iv)), \quad f''(v) = \frac{1}{2}(g(v) + ig(iv)),$$

则 $f' \in F$, $f'' \in \bar{F}$，并且 $g = f' + f''$. 我们令 $F = \mathscr{E}^*_{1,0}$, $\bar{F} = \mathscr{E}^*_{0,1}$. 从 $\boldsymbol{C}$ 到其自身上的映射 $z \longmapsto \bar{z}$ 诱导了一个从 $\mathscr{E}^*$ 到其自身上的 $\boldsymbol{R}$ 线性映射，它将 F 映为 $\bar{F}$. 我们用 $\bar{g}$ 表示 $g \in \mathscr{E}^*$ 在这个映射下的像. 若 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 F 的一个 $\boldsymbol{C}$ 基，则 $(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n)$ 是 $\bar{F}$ 的

---

1) 原文将 $f_{*,a}$ 误为 f_a^*.——译者注

2) 原文将 $f_{*,a}$ 误为 f_{a*}.——译者注

一个 $\boldsymbol{C}$ 基.

把 $\mathscr{E}^*$ 看作为一个复向量空间，我们考虑 $\mathscr{E}^*$ 的外积 $\wedge^r\mathscr{E}^*$. 令 p, q 是整数，满足 $p+q=r$，并令 $\mathscr{E}^*_{p,q}$ 表示 $\wedge^r\mathscr{E}^*$ 的一个子空间，它由所有形如

$$u_{j_1}\wedge\cdots\wedge u_{j_p}\wedge\bar{v}_{k_1}\wedge\cdots\wedge\bar{v}_{k_q}$$

的元素所生成，其中 $u_{j_\nu}\in F$, $\nu=1,\cdots,p$, $\bar{v}_{k_\mu}\in\bar{F}$, $\mu=1,\cdots,q$. 元素组

$$e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}\wedge\bar{e}_{k_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}_{k_q}\equiv e_J\wedge\bar{e}_K,$$

其中 $j_1<\cdots<j_p, k_1<\cdots<k_q$ (但在诸 j，诸 k 之间不存在联系)，给出了 $\mathscr{E}^*_{p,q}$ 的一个基.

我们有

$$\wedge^r\mathscr{E}^*=\sum_{p+q=r}\mathscr{E}^*_{p,q},$$

其中和式是直接和.

若 V 是一个 n 维复流形，$a\in V$，我们取 $E=T_a(V)$，这里 $T_a(V)$ 具有在(2.4.6)中定义的复结构. 令

$$\mathfrak{T}^*_a(V)=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(T_a(V),\boldsymbol{C})=T^*_a(V)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C};$$

这是一个 $2n$ 维的 $\boldsymbol{C}$ 向量空间. 如前所述，若$(z_1,\cdots,z_n)$是一个开集 U 中的坐标，$z_j=x_j+iy_j$，则我们有

$$(dx_j)_a, (dy_j)_a\in T^*_a(V)\subset\mathfrak{T}^*_a(V).$$

因此我们可以定义

$$(dz_j)_a=(dx_j)_a+i(dy_j)_a\in\mathfrak{T}^*_a(V)$$

(参阅注 2.1.12)；我们也令

$$(d\bar{z}_j)_a=(dx_j)_a-i(dy_j)_a.$$

容易验证，$(dz_j)_a$, $(d\bar{z}_j)_a$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 构成 $\mathfrak{T}^*_a(V)$ 的一个 $\boldsymbol{C}$ 基 (因为 $(dx_j)_a$, $(dy_j)_a$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 构成 $T^*_a(V)$ 的一个 $\boldsymbol{R}$ 基).

定义

$$\mathfrak{T}_a(V)=T_a(V)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(\mathfrak{T}^*_a(V),\boldsymbol{C}).$$

它是 $\mathfrak{T}^*_a(V)$ 的对偶空间，存在 $\mathfrak{T}_a(V)$ 的一个基，与上述 $\mathfrak{T}^*_a(V)$ 的基相对偶. 若我们令

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right)_a=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a-i\left(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_a\right\},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu}\right)_a=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a+i\left(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_a\right\},$$

(其中,用 i 的相乘是在 $T_a(V)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ 中的,而不是在 $T_a(V)$ 中的,即, $i(\partial/\partial y_\nu)_a=(\partial/\partial y_\nu)_a\otimes i$), 则刚才所说的对偶基即由向量组 $(\partial/\partial z_\nu)_a$, $(\partial/\partial\bar{z}_\nu)_a$ $(1\leqslant\nu\leqslant n)$ 给出. 像以前一样,我们知道

$$\mathfrak{T}(V)=\bigcup_{a\in V}\mathfrak{T}_a(V),\quad \mathfrak{T}^*(V)=\bigcup_{a\in V}\mathfrak{T}^*_a(V)$$

是实 $6n$ 维的 C^∞ 流形.与前面一样,可以定义 $\wedge^p\mathfrak{T}(V)$, $\wedge^p\mathfrak{T}^*(V)$, 而 V 上的一个 C^∞ 复值微分 p-形式 ω 是一个 C^∞ 映射 $\omega:V\to\wedge^p\mathfrak{T}^*(V)$, 使得对于 $a\in V$, 有 $\omega(a)\in\wedge^p\mathfrak{T}^*_a(V)$[1].

若 $E=T_a(V)$, 则与上面一样,我们考虑

$$\wedge^r\mathscr{E}^*=\sum_{p+q=r}\mathscr{E}^*_{p,q}.$$

当要强调对于 V 和 a 的依赖性时,我们就记作 $\mathscr{E}^*(V,a)$, $\mathscr{E}^*_{p,q}(V,a)$, $\cdots$. 容易知道, $(dz_1)_a$, $\cdots$, $(dz_n)_a$ 张成 $\mathscr{E}^*_{1,0}$, $(d\bar{z}_1)_a$, $\cdots$, $(d\bar{z}_n)_a$ 张成 $\mathscr{E}^*_{0,1}$. 因而 $\mathscr{E}^*_{p,q}$ 由余向量组

$$dz_J\wedge d\bar{z}_K=dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q}$$

所张成. $\mathscr{E}^*_{p,q}$ 的元素称为 (p,q) 型的余向量.

2.4.11 定义 一个复值微分形式 $\omega:V\to\wedge^r\mathfrak{T}^*(V)$ 称为 (p,q) 型的,若对于任何 $a\in V$, 有 $\omega(a)\in\mathscr{E}^*_{p,q}(V,a)$.

用局部坐标的语言, ω 是 (p,q) 型的,当且仅当

$$\omega(a)=\sum_{\substack{j_1<\cdots<j_p\\ k_1<\cdots<k_q}}\omega_{JK}dz_J\wedge d\bar{z}_K,$$

$$J=(j_1,\cdots,j_p),\quad K=(k_1,\cdots,k_q).$$

若 V, W 是复流形, $f:V\to W$ 是一个全纯映射,则我们仍有映射

$$f^*_a:\mathfrak{T}^*_b(W)\to\mathfrak{T}^*_a(V),\quad b=f(a),$$

---

1) 原文将 $\omega(a)\in\wedge^p\mathfrak{T}^*_a(V)$ 误为 $\omega(a)\in{}^p\mathfrak{T}^*_a(V)$.——译者注

并且，如在定义 2.4.4 中一样，我们可以定义W上的一个复值 p-形式 ω 的拉回 $f^*(\omega)$.

2.4.12 命题 若 f 是一个全纯映射，$a\in V$，$f(a)=b$，则我们有

$$f_a^*(\mathscr{E}_{p,q}^*(W,b))\subset\mathscr{E}_{p,q}^*(V,a).$$

特别，若 ω 是W上的一个 (p,q) 型形式，则 $f^*(\omega)$ 是V上的一个 (p,q) 型形式.

证明 我们只需证明

$$f_a^*(\mathscr{E}_{1,0}^*(W,b))\subset\mathscr{E}_{1,0}^*(V,a)$$

即可. 然而，若 g 是在 b 处的一个全纯函数芽，则

$$f_a^*((dg)_b)=d(g\circ f)_a\in\mathscr{E}_{1,0}^*(V,a)$$

是显然的. 因为 $g\circ f$ 是全纯的.

2.4.13 注 我们可以把一个复流形V上的全纯向量场X定义为一个全纯映射 $X:V\to T(V)$（参阅定理 2.4.7），它使得对于任何 $a\in V$，有 $X(a)\in T_a(V)$. 然而对于任何 $a\in V$，实际上 $T_a(V)$ 是 $\mathfrak{T}_a(V)$ 的一个子空间. 因此，一个向量场 $X:V\to\mathfrak{T}(V)$ 是全纯的（在下述意义下：对于任何 a，$X(a)\in T_a(V)$，并且X表示一个映入 $T(V)$ 中的全纯映射），当且仅当对于每个 $a\in V$，存在一个坐标系 (U,φ)，$a\in U$，使得在表达式

$$X(b)=\sum_{\nu=1}^{n}\left\{a_\nu(b)\left(\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right)_b+a'_\nu(b)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\nu}\right)_b\right\},\quad b\in U$$

中，所有的 $a'_\nu(b)$ 为 0，所有的 $a_\nu(b)$ 为 b 的全纯函数.

此外注意，若 X,Y 是全纯向量场，则 $[X,Y]$ 也是全纯向量场.

§2.5. 子 流 形

令V是一个 C^k 流形，$k\geqslant 1$. 考虑 C^k 流形W以及具有下述性质的内射的(即，一对一的) C^k 映射 $i:W\to V$ 的集合：对于任何 $a\in W$，映射

$$i_{*,a}:T_a(W)\to T_{i(a)}(V)$$

是内射的．两个这样的对 (W_1, i_1) 和 (W_2, i_2) 称为等价的，若存在一个 C^k 微分同胚 $h: W_1 \to W_2$，使得 $i_1 = i_2 \circ h$．这是一个等价关系．

2.5.1 定义 V 的一个子流形是在上面所定义的等价关系下 (W, i) 的一个等价类．

在不会发生混淆的时候，我们将经常把一个子流形等同于它的表示之一．

若 $m = \dim W = \dim T_a(W)$，$a \in W$，和 $n = \dim V = \dim T_{i(a)}(V)$，则我们显然有 $m \leqslant n$．

2.5.2 注 令 $\dim W = m$，$a \in W$，则由秩定理 2.2.11，在 a 处存在一个坐标系 (U, φ)，在 $i(a)$ 处存在一个坐标系 (U', φ')，使得 $\varphi' \circ i \circ \varphi^{-1} | \varphi(U)$ 是映射

$$(x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

由此即得，若 (U_1, ϕ_1) 是 $a \in W$ 处的任意一个坐标系，$\phi_1(x) = (y_1, \cdots, y_m)$，则在 $i(a)$ 处存在一个坐标系 (U_2, ϕ_2)，使得若 $\phi_2(u) = (u_1, \cdots, u_n)$，$u \in U_2$，则在 W 中 a 的一个邻域上，我们有 $u_j \circ i = y_j \quad (j = 1, \cdots, m)$．

2.5.3 命题 令 W 是 n 维 C^k 流形 V 的一个闭子集．假设对于每个 $a \in W$，在 V 上存在一个坐标系 (U, φ)，使得若 $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，我们即有

$$W \cap U = \{x \in U | x_{r+1} = \cdots = x_n = 0\};$$

这里 r 是一个固定的整数，满足 $0 \leqslant r \leqslant n$，则 W 具有一个自然的 C^k 流形结构，并且，从 W 到 V 中的内射使 W 成为 V 的一个子流形．

其证明是很容易的，略去不证．

2.5.4 注 相应于 2.5.1–2.5.3 的定义与注适用于实的和复的解析流形．

2.5.5 推论 令 V 是一个 C^k（实解析，复解析）流形，$f_1, \cdots, f_p (1 \leqslant p < n)$ 是 V 上的 C^k（实解析，全纯）函数．令

$$W = \{x \in V | f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0\},$$

并假设对于所有 $a \in W$，$(df_1)_a, \cdots, (df_p)_a$ 是线性无关的．则

(W,i) (i 是内射映射[1]) 是维数为 $n-p$ 的 V 的一个 C^k (实解析，复解析) 子流形.

这是命题 2.5.3 和秩定理 2.2.11, 2.4.9 的一个直接推论.

2.5.6 例 n 维球面 $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 由

$$S^n = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

所定义. 因为若 $f(x) = x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1$, 则对于 $a \in S^n$, 我们有 $(df)_a \neq 0$, 因而由推论 2.5.5, S^n 具有一个自然的实解析结构.

一般地, 若 (W, i) 是 V 的一个子流形, i 不一定是从 W 到 $i(W)$ 上的一个同胚 ($i(W)$ 具有由 V 所诱导的拓扑). 现在我们来寻求关于 i 的条件,它使 i 为一同胚.

2.5.7 定义 令 V 和 W 是局部紧 Hausdorff 空间. 一个连续映射 $f: V \to W$ 称为*局部常态的*, 若对于每个 $w \in f(V)$, 在 W 中存在 w 的一个紧邻域 K, 使得 $f^{-1}(K)$ 是紧的. f 称为*常态的*,若对于 W 中任意紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是紧的.

众所周知,一个常态映射将 V 中的闭集映为 W 中的闭集(参阅 Bourbaki [1965]). 由此容易得到, *一个局部常态映射 $f: V \to W$ 是常态的,当且仅当 $f(V)$ 在 W 中是闭的.* [自然,任一常态映射是局部常态的.]

2.5.8 命题 令 V 是一个 C^k 流形, (W, i) 是 V 的一个子流形. 若 $i(W)$ 具有由 V 所诱导的拓扑, 则, 映射 $i: W \to i(W)$ 是从 W 到 $i(W)$ 上的一个同胚,当且仅当 i 是局部常态的.

证明 首先假设 i 是局部常态的. 则给定 $a \in W$, 在 V 中存在一个 $i(a)$ 的紧邻域 K, 使得 $i^{-1}(K)$ 是紧的, 因而 $i^{-1}(K)$ 是 a 的一个紧邻域. 然而

$$i: i^{-1}(K) \to K \cap i(W)$$

是一个连续的双满映射, 它把一个紧 Hausdorff 空间映到一个 Hausdorff 空间上,因而它是一个同胚映射. 显然,这蕴涵着 i^{-1} 是连续的.

---

1) 见第 73 页注 1). ——译者注

现在假设 $i: W \to i(W)$ 是一个同胚映射.则若 $a \in W$,并且 C 是 a 在 W 中的一个紧邻域，那么 $i(C)$ 就是 $i(a)$ 在 $i(W)$ 中的一个紧邻域. 因而存在一个 V 中的开集 D，使得

$$i(a) \in D \cap i(W) \subset i(C).$$

令 K 是 $i(a)$ 的一个紧邻域，$K \subset D$. 显然，

$$K \cap i(W) \subset D \cap i(W) \subset i(C).$$

因为 i 是内射的，因此上述包含关系蕴涵着 $i^{-1}(K) \subset C$，因而 $i^{-1}(K)$ 是紧的.

2.5.9 定义 V 的一个子流形 $\{(W, i)\}$ 称为闭的，如果对于表示此子流形的每对 (W, i)，映射 $i: W \to V$ 是常态的.

注意，若 (W', i') 等价于 (W, i)，并且 i 是常态的，则 i' 也是常态的.

现在我们来给出不保持拓扑的子流形的一个例子. 这个例要用到属于 Kronecker 的下述定理，我们对此定理不加证明. 它的一个更强的结论的既漂亮又简单的证明由 Weyl [1916] 给出.

2.5.10 Kronecker 定理 令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是实数，它们在整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上是线性无关的. 令

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 = \{(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) | \theta_i \in \boldsymbol{R}\},$$

并令 $\kappa: \boldsymbol{R} \to T^n$ 是映射

$$t \longmapsto (e^{i\lambda_1 t}, \cdots, e^{i\lambda_n t}),$$

则 $\kappa(\boldsymbol{R})$ 在 T^n 中稠.

2.5.11 例 环面 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$，$n > 1$，是一个 n 维解析流形. 考虑上面定义的映射 κ. 它是内射的，因为若 $\kappa(t_1) = \kappa(t_2)$，则

$$\lambda_j t_1 = \lambda_j t_2 + 2\pi m_j, \quad m_j \in \boldsymbol{Z}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

若 $t_1 \neq t_2$，且若 $k_1, \cdots, k_n$ 是不全为 0 的整数，使得

$$\sum_{j=1}^{n} k_j m_j = 0,$$

则我们有

$$(t_1 - t_2)\sum_{j=1}^{n} k_j\lambda_j = 0,$$

这与诸 λ_j 在 $\boldsymbol{Z}$ 上是无关的这一假设矛盾. [因为 $n > 1$, 所以具有上述性质的诸 k_j 存在.] 此外, 对于任何 $a \in \boldsymbol{R}$, $\operatorname{rank}(d\kappa)_a = 1$. 由此即得 (T^n, κ) 定义了一个子流形. 但是 κ 不是局部常态的. 因为若否, 即得任何 $x_0 \in \kappa(\boldsymbol{R}) = S$ 有一个邻域 U, 使得 $S \cap U$ 在 U 中是闭的 (因为一个常态映射将闭集映为闭集). 因为由定理 2.5.10, S 在 T^n 中稠, 因而 $\bar{S} \cap U = U$, 这就蕴涵着 S 是开的. 但是由于 $n > 1$, 所以 S 不能包含 T^n 的开子集 (例如, 由于引理 1.4.3).

下面三个命题将一个 C^k 子流形的结构与"大"的流形的结构联系起来了.

2.5.12 命题 令 V 是一个 C^k 流形, (W, i) 是 V 的一个子流形. 令 M 是任一 C^k 流形, $f: M \to W$ 是一个连续映射. 则 f 是 C^k 的, 当且仅当 $i \circ f: M \to V$ 是 C^k 的.

证明 令 $a \in W$; 选取 a 处的一个坐标系 (U, φ), $i(a)$ 处的一个坐标系 (U', φ'), 使得若[1]

$$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_m), \quad \varphi'(u) = (u_1, \cdots, u_n),$$

则 $\varphi' \circ i \circ \varphi^{-1} | \varphi(U)$ 即为映射

$$(x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

则若

$$\varphi \circ f(y) = (y_1, \cdots, y_m),$$

$(y \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ 是开的, 因为 f 是连续的), 我们就有

$$\varphi' \circ i \circ f(y) = (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0).$$

而我们的命题只是断言

$$y \longmapsto (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0)$$

是 C^k 的, 当且仅当

$$y \longmapsto (y_1, \cdots, y_m)$$

是 C^k 的.

---

1) 原文将 $\varphi'(u) = (u_1, \cdots, u_n)$ 误为 $\varphi'(U) = (u_1, \cdots, u_n)$. ——译者注

2.5.13 命题 令V是一个C^k流形，(W, i)是V的一个C^k子流形。一个$a\in W$处的连续函数芽g_a是C^k的，当且仅当存在一个$b=i(a)$处的C^k函数芽G_b，使得$G_b\circ i = g_a$。反之，若i是一个从C^k流形W到C^k流形V中的连续内射，具有上述性质，则(W, i)是V的一个子流形。

证明 假设(W, i)是一个C^k子流形。选取$a\in W$处的坐标系(U, φ)，$b=i(a)$处的坐标系(U', φ')，使得$\varphi(U)$，$\varphi'(U')$分别是$\boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{R}^n$中的立方体，并使得$\varphi'\circ i\circ\varphi^{-1}|\varphi(U)$就是映射

$$(x_1, \cdots, x_m)\longmapsto(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

那么，如果$g\in C^k(U)$，并且用

$$G\circ\varphi'^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = g\circ\varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_m)$$

定义$G\in C^k(U')$，显然，我们有$G\circ i = g$。命题的第一部分就立刻得到了。

反之，假设$i: W\to V$是一个连续内射，使得在$a\in W$处的C^k芽的集合即为芽$G\circ i$的集合，其中G遍及$b=i(a)$处的C^k芽的集合。

首先，我们断言i是一个C^k映射。令$a\in W$，$b=i(a)$，并令(U', φ')是b处的一个坐标系，$\varphi'(u)=(u_1, \cdots, u_n)$。则$\varphi'\circ i|i^{-1}\varphi'^{-1}(U')$是映射$x\longmapsto(x_1, \cdots, x_n)$，其中$x_j = u_j\circ i$。因为$u_j\in C^k(U')$，因而由假设，$x_j\in C^k(\varphi'^{-1}(U'))$；这意味着$i$是一个$C^k$映射。

其次，我们断言，若$a\in W$，$b=i(a)$，则存在a的一个邻域D和b的一个邻域D'，以及一个C^k映射$p: D'\to D$，使得$p\circ i=\mathrm{id}_D$。令(U, φ)是a处的一个坐标系，$\varphi(x)=(x_1, \cdots, x_m)$。由假设，若$U$足够小，则在$b$的某个邻域$U'$中存在$C^k$函数$p_j$，使得$i(U)\subset U'$，并且$p_j\circ i = x_j$。我们假设$U$，$U'$如此小，使得在$U'$上有坐标$\varphi'$。显然，如果$q=(p_1, \cdots, p_m)$，则我们可以选取$b$的一个邻域$D'$[1]，使得$p(D')\subset U$，其中$p=\varphi^{-1}\circ q$。显然，$p\circ i$是$a$的一

1) 原文将b误为a。——译者注

个邻域中的恒等映射;特别,若 D' 足够小,则 $p(D')=D$ 在W中是开的,并且 $p\circ i=\mathrm{id}_D$.

我们有 $p_{*,b}\circ i_{*,a}=\mathrm{id}_{T_a(W)}$(由注 2.2.1),因而,特别有 $i_{*,a}$ 是内射的.

2.5.14 命题 令V是一个有可数基的 C^k 流形,(W,i)是一个闭的 C^k 子流形(即,$i:W\to V$ 是一个常态映射),则对于W上任何 C^k 函数 g,存在V上的一个 C^k 函数 G,使得 $g=G\circ i$.

证明 令 $W'=i(W)$,则 W' 在V中是闭的. 对于每个 $a\in W'$,存在 a 在V中的一个邻域 U_a 和 U_a 上的一个 C^k 函数 G_a,使得在 $i^{-1}(U_a)$ 上 $G_a\circ i=g$;这从命题 2.5.13 和 $i:W\to W'$ 是一个同胚这一事实即得. 考虑V的开覆盖 $\{U_a,V-W'\}_{a\in W'}$. 由定理 2.2.14,存在一个从属于这个开覆盖的单位分解$\{\eta_a,\eta\}$,即,V上的 C^k 函数族 $\{\eta_a,\eta\}$,使得 $\eta_a,\eta\geqslant 0$,$\mathrm{supp}(\eta_a)\subset U_a$,$\mathrm{supp}(\eta)\subset V-W'$,它们的支集构成一个局部有限族,并且

$$\eta(x)+\sum_{a\in W'}\eta_a(x)=1.$$

我们用

$$h_a(x)=\begin{cases}\eta_a(x)G_a(x) & x\in U_a,\\ 0 & x\notin U_a\end{cases}$$

定义 $h_a\in C^k(V)$,则 $\{\mathrm{supp}(h_a)\}$ 是局部有限的,因而

$$G=\sum_{a\in W'}h_a\in C^k(V).$$

若 $w\in W$和

$$A=\{a\in W'\mid i(w)\in U_a\},$$

则我们有

$$\sum_{a\in A}\eta_a(i(w))=\eta(i(w))+\sum_{a\in W'}\eta_a(i(w))=1.$$

因而

$$G\circ i(w)=\sum_{a\in A}G_a(i(w))\eta_a(i(w))$$

$$= g(w) \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha(i(w)) = g(w).$$

2.5.15 注 对于实流形或复流形及相应的映射和函数，命题 2.5.12，2.5.13 及它们的证明仍然成立．对于(具有可数基的)实解析流形和解析函数，命题 2.5.14 成立．然而要证明它是很难的；参阅 Cartan [1957]和 Grauert [1958]．对于复流形(和全纯函数)，相应的命题一般是不成立的．使得这样的命题成立的一个很重要的情形(属于 Oka [1936])将在稍后一些被论及(参阅定理 2.14.9)．

2.5.16 注 若V是一个 C^k 流形，(W,i) 是V的一个闭的子流形，ω是V上的一个 p-形式，则我们用 $\omega|W$表示W上的形式 $i^*(\omega)$．

§2.6. 外微分运算

令V是一个 C^k 流形，$k \geqslant 2$，并令 $A^p(V,r)$ $(p > 0, 0 \leqslant r < k)$ 表示V上所有的 p 次 C^r 微分形式的集合．若 $p=0$，则对于 $0 \leqslant r \leqslant k$，$A^0(V,r)$ 表示V上所有 C^r 函数的集合．我们现在要讨论的结果对于实值的函数和形式以及复值的函数和形式也是对的．

2.6.1 定义 一个外导数[1] $d = d_V$ 是一个对应，对于每对 (p,r) (当 $p > 0$ 时 $1 \leqslant r < k$，当 $p=0$ 时 $1 \leqslant r \leqslant k$)，它相应于一个映射 $d: A^p(V,r) \to A^{p+1}(V,r-1)$，满足下面一些条件：

(a) 对于每个 p 和 r，d 是 $\boldsymbol{R}$ (或 $\boldsymbol{C}$) 线性的．

(b) 若 $f \in A^0(V,r)$，$1 \leqslant r \leqslant k$，则 df 是一个 1-形式 ω，如下定义：$\omega(a) = (df)_a = f$ 在 $T_a^*(V)$ 中的像．

(c) 若 $f \in A^0(V,r)$，$2 \leqslant r \leqslant k$，则我们有 $d(df) = 0$．

(d) 若 $\omega_1 \in A^p(V,r)$，$\omega_2 \in A^q(V,r)$，则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

在证明外导数的存在性和唯一性之前，我们先来推导 (a)—

---

1) 有的书中称为外微分 (exterior differential)．——译者注

(d) 的某些推论。

2.6.2 命题 d 是一个局部算子。换言之，若 $\omega \in A^p(V, r)$，并且对于 V 中的某个开集 U，$\omega|U = 0$，则 $d\omega|U = 0$。

证明 令 $a \in U$，并令 f 是 V 上的一个 C^k 函数，在 a 的一个邻域中 $f = 0$，在 $V - U$ 的一个邻域中 $f = 1$（推论 2.2.15），则 $\omega = f\omega$。因而

$$d\omega = (df) \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$

然而在 a 的一个邻域中 $f = 0$，并且 $\omega(a) = 0$，因而 $(d\omega)(a) = 0$。因为 $a \in U$是任意的，这就证明了命题。

注意，上述 f 的存在性不需要 V 有可数基这一假设，虽然推论 2.2.15 需要此假设。事实上，若 U' 是 a 的一个相对紧邻域，则由推论 2.2.15，存在一个 C^k 函数，它在 a 的附近等于 0，在 U' 的边界 $\partial U'$ 的一个邻域中等于 1；我们可以在 $V - U'$ 上定义 f 为 1。

2.6.3 命题 令 $k \geq 3$，$r \geq 2$，则在 $A^p(V, r)$ 上 $d^2 = 0$。

证明 我们不妨假设 $p \geq 1$。令 $a \in V$。我们注意，若 $\omega \in A^p(V, r)$，则我们可以找到一个 p-形式 ω'，它是型如

2.6.4 $$g \cdot dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_p, \quad g \in C^r(V), \quad g_i \in C^k(V)$$

的形式的一个有限线性组合，使得在 a 的一个邻域中 $\omega - \omega' = 0$。事实上，若 (U, φ) 是 a 处的一个坐标系[1]，$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，并且

$$\omega(x) = \sum_J f_J(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p},$$

$$J = (j_1, \cdots, j_p), j_1 < \cdots < j_p,$$

则我们可以把 ω' 取成由下述方式所得到的形式：在 ω 的上述表示中用 ηf_J 代替 f_J，用 ηx_j 代替 x_j，其中 $\eta \in C^k(V)$，在 a 的一个邻域中 $\eta = 1$，并且 η 有包含在 U 中的紧支集。因而，由命题 2.6.2，只需证明，若 ω 有 (2.6.4) 型，则 $d^2\omega = 0$。然而由关于 p 的归纳法和条件 2.6.1. c，d，我们有

---

1) 原文将 (U, φ) 误为 (V, φ)。——译者注

$$d(dg_1\wedge\cdots\wedge dg_p)=0.$$

因而条件 2.6.1.d 给出

$$d^2(gdg_1\wedge\cdots\wedge dg_p)=d^2(g)\wedge dg_1\wedge\cdots\wedge dg_p=0$$

(最后一步是由于条件 2.6.1.c).

2.6.5 定理 若 V 是一个 C^k 流形，$k\geqslant 2$，则外导数存在，并且是唯一的.

证明 唯一性：令 d_1, d_2 是两个外导数. 由条件 2.6.1.b，若 $f\in C^r(V)$，则 $d_1f=d_2f$；此外，d_1, d_2 都是局部算子. 因而只需证明：在任意给定点 $a\in V$ 的一个邻域中 $d_1\omega=d_2\omega$. 然而，在 a 的邻域中 ω 等于(2.6.4)型的形式的一个有限线性组合. 因而，由命题 2.6.2，只需证明

$$d_1(gdg_1\wedge\cdots\wedge dg_p)=d_2(gdg_1\wedge\cdots\wedge dg_p).$$

但是仍由关于 p 的归纳法和条件 2.6.1.c, d，我们有

$$d_j(gdg_1\wedge\cdots\wedge dg_p)=dg\wedge dg_1\wedge\cdots\wedge dg_p,\quad j=1,2.$$

这就证明了唯一性.

存在性：由于上面所证明的唯一性，以及命题 2.6.2，只需证明当 V 是 C^k 微分同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一开集 Ω 时，外导数的存在性即可. 令 $\varphi: V\to\Omega$ 是一个 C^k 微分同胚，$\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$. 任何 $\omega\in A^p(V,r)$ 可被唯一地写为下述形式：

$$\omega(x)=\sum_J f_J(x)dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p},$$

$$J=(j_1,\cdots,j_p),\ j_1<\cdots<j_p,\ f_J\in C^r(V).$$

我们定义

$$d\omega=\sum_J df_J\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p},$$

其中 df_J 由条件 2.6.1.b 所定义. 显然，这个算子满足条件 2.6.1.a, b. 至于条件 2.6.1.c，由命题 2.1.11′，我们有

$$(df)(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x f\cdot dx_\nu,$$

$$(d^2f)(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\left\{\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x f\right]\right\}\wedge dx_\mu$$

$$= \sum_{\mu<\nu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\right] f\cdot dx_\mu\wedge dx_\nu = 0,$$

因为向量场 $(\partial/\partial x_\mu)$, $(\partial/\partial x_\nu)$ 的 Poisson 括号为 0.

为了证明条件 2.6.1.d, 我们可以假设

$$\omega_1 = f_1 dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p},\quad \omega_2 = f_2 dx_{k_1}\wedge\cdots\wedge dx_{k_q};$$

我们记 $\omega_1 = f_1 dx_J$, $\omega_2 = f_2 dx_K$. 我们有

$$\omega_1\wedge\omega_2 = (f_1f_2)dx_J\wedge dx_K.$$

由定义,显然有

$$d(\omega_1\wedge\omega_2) = d(f_1f_2)\wedge dx_J\wedge dx_K$$

$$= \{(df_1)f_2 + f_1(df_2)\}\wedge dx_J\wedge dx_K$$

$$= df_1\wedge dx_J\wedge f_2dx_K + (-1)^p f_1dx_J\wedge(df_2)\wedge dx_K;$$

其中我们利用了

$$d(f_1f_2) = (df_1)f_2 + f_1(df_2)$$

这一事实以及下述事实: 若 E 是一个向量空间,则我们有

$$e_0\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_p = (-1)^p e_1\wedge\cdots\wedge e_p\wedge e_0,$$

$$e_j\in E,\quad 0\leqslant j\leqslant p.$$

很清楚,这就证明了条件 2.6.1.d, 因而就证明了定理 2.6.5[1].

我们已经注意到 $T_a^*(V)$ 是 $T_a(V)$ 的对偶空间(命题 2.1.11). 因而 $\wedge^p T_a^*(V)$ 是 $\wedge^p T_a(V)$ 的对偶空间,以致可以把任何一个 $\omega_a\in\wedge^p T_a^*(V)$ 看成一个 $\bigoplus_{\nu=1}^{p} T_a(V)$ 上的交错多重线性函数,并且,任何一个 p-形式 ω 产生一个空间

$$\mathfrak{X}^p = \bigoplus_{\nu=1}^{p}\mathfrak{X}$$

的交错多重线性映射,其中 $\mathfrak{X}$ 是 V 上 C^{k-1} 向量场的空间(参阅命题 2.4.3),它在 C^{k-1} 函数的环上是多重线性的.

---

1) 原文将定理 2.6.5 误为定理 2.6.1.——译者注

2.6.6 命题 若 ω 是一个 C^{k-1} p-形式，$X_1, \cdots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}$，则映射 $d\omega: \mathfrak{X}^{p+1} \to R_{k-2}$（$R_{k-2}$ 是环 $C^{k-2}(V)$）由

$$(d\omega)(X_1, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu+1} X_\nu(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_\nu, \cdots, X_{p+1})) + \sum_{\mu<\nu} (-1)^{\mu+\nu} \omega([X_\mu, X_\nu], X_1, \cdots, \hat{X}_\mu, \cdots, \hat{X}_\nu, \cdots, X_{p+1})$$

所给出，这里在 X_ν 上的符号 $\wedge$ 意味着这一项不出现。

由于这个命题的证明中的计算太冗长，因此我们只在 $p=1$ 的情形加以证明；一般情形中的一个证明——从一极不相同的观点而得到的——给出于 Koszul [1960]，事实上，在那里这个公式是作为外导数的定义的。

$p=1$ 时命题 2.6.6 的证明 只需在任意一点的邻域中证明这个公式即可；这样，我们不妨假设 $\omega = f_1 df_2$，其中 $f_1 \in C^{k-1}(V)$，$f_2 \in C^k(V)$。并且，我们有 $d\omega = (df_1) \wedge (df_2)$。这就得到

$$\begin{aligned}(df_1 \wedge df_2)(X_1, X_2) &= \det\begin{pmatrix}(df_1)(X_1) & (df_1)(X_2) \\ (df_2)(X_1) & (df_2)(X_2)\end{pmatrix} \\ &= X_1(f_1)X_2(f_2) - X_1(f_2)X_2(f_1) \\ &= X_1[f_1X_2(f_2)] - X_2[f_1X_1(f_2)] \\ &\quad - f_1X_1(X_2(f_2)) + f_1X_2(X_1(f_2)) \\ &= X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]),\end{aligned}$$

这就是所需要的公式。

2.6.7 命题 令 V, W 是 C^k 流形，$f: V \to W$ 是一个 C^k 映射。则若 ω 是 W 上的一个 p-形式，我们即有

2.6.8 $$d_V f^*(\omega) = f^*(d_W \omega);$$

这里 d_V，d_W 分别表示 V 上和 W 上的外导数。

证明 只需在 W 是 C^k 微分同胚于 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集时证明这个结果即可。此外，由于

$$f^*: A(W) \to A(V)$$

（所有微分形式的空间）是一个代数同态，并由于条件 2.6.1.d，因而

只需对于 $A(W)$ 的一组元素证明 (2.6.8) 即可，这里，$A(W)$ 作为一个代数，这组元素生成 $A(W)$. 因为 W 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，因而元素组 $\{h, dg\}$，其中 $h\in C^{k-1}(W)$，$g\in C^k(W)$，就是这样一个组.

由 f_a^* 的定义，

$$f_a^*(dh)_{f(a)} = d(h\circ f)_a,$$

它给出了当 $\omega = h$ 时的(2.6.8). 若 $\omega = dg$，则

$$f^*(d_W\omega) = 0,\ d_V f^*(\omega) = d_V(d_V(g\circ f)) = 0.$$

这就证明了命题.

2.6.9 定义 C^k 流形 V 上的一个微分形式 ω 称为闭的，若 $d\omega = 0$. 它称为正合的，若存在一个微分形式 ω'，使得 $d\omega' = \omega$；这里 ω, ω' 是 C^{k-1} 的.

若 V 是一个 C^∞ 流形，我们用 $Z^p(V)$ 表示闭的 p-形式的集合，用 $B^p(V)$ 表示正合 p-形式的集合. 由命题 2.6.3，我们有 $B^p(V)\subset Z^p(V)$. 商

$$H^p(V) = Z^p(V)/B^p(V)$$

称为 V 的 de Rham 上同调群. de Rham 的一个基本的定理断言，这些群是 V 的拓扑不变量，即，同胚的 C^∞ 流形有同构的 de Rham 群. 其证明可参阅 Weil [1952].

现在我们来考察复流形上的外导数. 令 V 是一个复流形，$a\in V$，$\mathscr{E}^*_{p,q}(V, a)$ 是 a 处 (p, q) 型的余向量空间. 我们用 $\mathscr{A}^{p,q}(V)$ 表示 V 上 (p, q) 型的所有 C^∞ 形式的空间；则

$$\mathscr{A}(V) = \sum_{p,q\geqslant 0} \mathscr{A}^{p,q}(V)$$

是 V 上所有复值微分形式的空间. 和以前一样，我们可以定义具有性质 2.6.1.a-d 的外导数 $d: \mathscr{A}(V)\to\mathscr{A}(V)$. 事实上，

$$\mathscr{A}(V) = A(V)\otimes_R \mathbf{C},$$

因而前面定义的算子 d 可以开拓到 $\mathscr{A}(V)$ 上.

若 $f\in C^\infty(V, \mathbf{C})$，$a\in V$，则

$$(df)_a\in \mathfrak{T}_a^*(V) = \mathscr{E}^*_{1,0}\oplus\mathscr{E}^*_{0,1}.$$

因而

$$(df)_a=(\partial f)_a+(\bar{\partial} f)_a,$$

其中

$$(\partial f)_a\in \mathscr{E}^*_{1,0}(V,a),\ (\bar{\partial} f)_a\in \mathscr{E}^*_{0,1}(V,a).$$

因而外导数

$$df=\partial f+\bar{\partial} f,$$

其中

$$\partial f\in \mathscr{A}^{1,0}(V),\ \bar{\partial} f\in \mathscr{A}^{0,1}(V).$$

我们断言

2.6.10 $$d\mathscr{A}^{p,q}(V)\subset \mathscr{A}^{p+1,q}(V)+\mathscr{A}^{p,q+1}(V).$$

这是一个局部问题，因而我们不妨假设 V 是一个坐标邻域 U. 令 $\varphi(z)=(z_1,\cdots,z_n)$ 是 U 中的复坐标. 则，$A^{p,q}(U)$ 的任何元素是形如

$$\omega'=fdz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q}\equiv fdz_J\wedge d\bar{z}_K$$

的元素的一个有限线性组合. 但是

$$d\omega'=(df)\wedge dz_J\wedge d\bar{z}_K=\partial f\wedge dz_J\wedge d\bar{z}_K$$
$$+(-1)^p dz_J\wedge\bar{\partial} f\wedge d\bar{z}_K,$$

它显然在

$$\mathscr{A}^{p+1,q}(U)+\mathscr{A}^{p,q+1}(U)$$

之中. 这样，若 $\omega\in\mathscr{A}^{p,q}(V)$，我们即可用条件

2.6.11 $d\omega=\partial\omega+\bar{\partial}\omega,\ \partial\omega\in\mathscr{A}^{p+1,q}(V),\ \bar{\partial}\omega\in\mathscr{A}^{p,q+1}(V)$

定义 $\partial\omega$, $\bar{\partial}\omega$. 显然，∂, $\bar{\partial}$ 可以开拓为 $\mathscr{A}(V)$ 上的 $\mathbf{C}$ 线性算子. 由于 $\mathscr{A}(V)$ 是直接和 $\sum\limits_{p,q\geq 0}\mathscr{A}^{p,q}(V)$，我们即知道 $d^2=0$ 这一事实等价于

2.6.12 $$\partial^2=0,\ \bar{\partial}^2=0,\ \partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial=0.$$

此外，若 $e\mapsto\bar{e}$ 表示在 §2.4 中定义的共轭映射 $\mathscr{E}^*_{1,0}\to\mathscr{E}^*_{0,1}$[1]，则我们有

$$\overline{\partial f}=\bar{\partial}(\bar{f}),\ f\in C^\infty(V,\mathbf{C}).$$

1) 原文将 §2.4 误为 §4.——译者注

令 V, V' 是复流形，$f: V \to V'$ 是一个全纯映射。令 ω' 是 V' 上 (p, q) 型的一个形式。由命题 2.6.7，

$$d_V f^*(\omega') = f^*(d_{V'}\omega')^{1)}.$$

因而

$$\partial f^*(\omega') + \bar{\partial} f^*(\omega') = f^*(\partial\omega') + f^*(\bar{\partial}\omega').$$

然而由命题 2.4.12，一个 (p, q) 型的形式在一个全纯映射下的拉回形式仍是 (p, q) 型的。因而上述方程即蕴涵着：当 $f: V \to V'$ 是全纯映射时，有

2.6.13 $$\partial f^* = f^*\partial, \quad \bar{\partial} f^* = f^*\bar{\partial}.$$

2.6.14 定义 复流形上一个 p 次微分形式 ω 是**全纯的**，若 ω 是 $(p, 0)$ 型的，并且 $\bar{\partial}\omega = 0$.

2.6.15 注 一个函数 $f \in C^\infty(V, \boldsymbol{C})$ 表示一个 0 次全纯形式，当且仅当 f 是一个全纯函数。一个 $(p, 0)$ 型的形式 ω 是全纯的，当且仅当对于每个复坐标系 $(U, \varphi)(\varphi(z) = (z_1, \cdots, z_n))$，$\omega$ 有表达式

$$\omega = \sum_J f_J dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p}, \quad J = (j_1, \cdots, j_p),$$
$$j_1 < \cdots < j_p,$$

其中诸 f_J 是全纯函数。这些结果是下面的注记的直接推论。

2.6.16 注 注意，在证明(2.6.10)时我们已经证明了，若在一个局部坐标中，一个 (p, q) 型的形式 ω 有表达式

$$\omega = \sum_{J,K} f_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad J = (j_1, \cdots, j_p),$$
$$K = (k_1, \cdots, k_q), \quad j_1 < \cdots < j_p, \quad k_1 < \cdots < k_q,$$
$$dz_J = dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p}, \quad d\bar{z}_K = d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q},$$

则

$$\begin{cases} \partial\omega = \displaystyle\sum_{J,K} \sum_\nu \left(\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right) f_{JK} dz_\nu \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K, \\ \bar{\partial}\omega = \displaystyle\sum_{J,K} \sum_\nu (-1)^p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu}\right) f_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_\nu \wedge d\bar{z}_K. \end{cases}$$

1) 原文将 $f^*(d_{V'}\omega')$ 误为 $f^*(d_W\omega')$. ——译者注

§ 2.7. 定　向

2.7.1 定义 令 V 是一个 n 维 C^k 流形，$k \geqslant 1$，则 V 称为可定向的，若在 V 上存在一个处处非零的连续 n-形式 ω.

若 V 是连通的，ω_1, ω_2 是两个处处不为 0 的 n-形式，则存在一个连续函数 f，使得 $\omega_1 = f\omega_2$；并且，或者处处 $f > 0$，或者处处 $f < 0$. 若对于所有 x，$f(x) > 0$，则我们称 ω_1 和 ω_2 是等价的；V 的一个定向是 n-形式的一个等价类的选择. 一个可定向的连通流形有两个可能的定向. 令 V 是一个 C^k 流形，(U_i, φ_i)，(U_j, φ_j) 是 V 上的两个坐标系，则

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \boldsymbol{R}^n$$

是一个 C^k 映射；我们令

$$d_{ij}(x) = \det\{d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x))\}.$$

2.7.2 命题 V 是可定向的，当且仅当我们可以找到坐标系族 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathscr{I}}$，使得 $V = \bigcup U_i$，并且对于 $x \in U_i \cap U_j (i, j \in \mathscr{I})$，$d_{ij}(x) > 0$.

证明 我们不妨假设 V 是连通的. 令 ω 是一个处处非零的连续 n-形式. 若 (U_a, φ_a) 是一个坐标系，$\varphi_a(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，我们令 $\omega_a = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$；这是 U_a 上的一个没有零点的 n-形式. 对于任意一点 $a \in V$，我们可以找到一个坐标系 (U_a, φ_a)，$a \in U_a$，使得 $\omega = g_a \omega_a$，其中 g_a 是一个连续函数，当 $x \in U_a$ 时 $g_a(x) > 0$（如果必要的话，我们用 $\varphi_a(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$ 代替 $\varphi_a(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$）. 此外，在 $U_a \cap U_b$ 上我们有

$$\omega_a = d_{ab} \omega_b.$$

因而在 $U_a \cap U_b$ 上 $d_{ab} = g_b / g_a > 0$.

反之，我们假设 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 是一族坐标系，满足 $V = \bigcup U_i$，并且在 $U_i \cap U_j$ 上 $d_{ij} > 0$. 和上面一样，若 $\varphi_i(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，则我们定义

$$\omega_i = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

令 $\{\eta_i\}$ 是一个从属于 $\{U_i\}$ 的 C^k 单位分解，并且定义

$$\omega = \sum \eta_i \omega_i.$$

显然，ω 是一个 C^{k-1} 形式. 并且，若 $a \in V$，I 表示使得 $a \in \operatorname{supp}(\eta_i)$ 的指标 i 的集合(它是一个非空有限集)，则我们有

$$\omega(a) = \sum_{i \in I} \eta_i(a)\omega_i(a) = \left\{\sum_{i \in I} \eta_i(a) d_{ii_0}(a)\right\} \omega_{i_0}(a),$$

其中 $i_0 \in I$ 是固定的. 因为

$$\sum_{i \in I} \eta_i(a) = 1,$$

以及对于任何 i, $d_{ii_0}(a) > 0$，并且 $\eta_i \geqslant 0$，所以我们得到 $\omega(a) \neq 0$.

2.7.3 注 上面的证明指出：在一个可定向的 C^k 流形上，存在一个没有零点的 C^{k-1} 形式.

现在我们考虑 V 上的 n-形式丛

$$\wedge^n T^*(V) = \bigcup_{a \in V} \wedge^n T_a^*(V)$$

和开集

$H = \{\xi \in \wedge^n T^*(V) | \xi \in \wedge^n T_a^*(V)$，并且不是 $\wedge^n T_a^*(V)$ 中的零元素$\}$. 令 $p: H \to V$ 是映射 $p(\xi) = a(\xi \in \wedge^n T_a^*(V))$. 我们在 H 上定义一个等价关系 $\sim$: $\xi_1 \sim \xi_2$，若 $p(\xi_1) = p(\xi_2)$，并且 $\xi_1 = \lambda \xi_2$，其中 $\lambda > 0$. 令 $\tilde{V}$ 是 H 关于这个等价关系的商. 容易知道，$\tilde{V}$ 是一个 Hausdorff 空间. 此外，映射 $p: H \to V$ 诱导了一个连续映射 $\pi: \tilde{V} \to V$.

2.7.4 命题 映射 $\pi: \tilde{V} \to V$ 是 V 的一个二叶覆盖，即，π 是一个覆盖映射，并且对于任何 $a \in V$，$\pi^{-1}(a)$ 由两个点组成.

证明 令 $a \in V$，(U, φ) 是一个坐标系，$a \in U$，U 是连通的. 令 ω 是 U 上的一个处处非零的 n-形式，它由

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \text{ 若 } \varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$$

所定义. 令 $\tilde{U}_1$ ($\tilde{U}_2$) 是具有下述性质的 $\tilde{x} \in \tilde{V}$ 的集合：$\pi(\tilde{x}) = x \in U$，并且 $\omega(x) \in \tilde{x}$($-\omega(x) \in \tilde{x}$). 显然，$\pi^{-1}(U) = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$，并且 $\pi | \tilde{U}_i$ 是一个映到 U 上的同胚. 这就证明了结论.

2.7.5 命题 令 V 是一个连通的 C^k 流形. 则 V 是可定向的，当且仅当 $\tilde{V}$ 不是连通的.

证明 令 V 是可定向的，ω 是 V 上的一个处处非零的 n-形式. ω 是一个连续映射 $V \to H$，因而诱导了一个连续映射 $\bar{\omega}: V \to \tilde{V}$. 显然，$\pi\circ\bar{\omega} = \mathrm{id}_V$，因而 $\tilde{V}$ 不是连通的.

若 $\tilde{V}$ 不是连通的，令 $\widetilde{W}$ 是 $\tilde{V}$ 的一个连通分枝. 显然，$\pi|\widetilde{W}\to V$ 是一个覆盖映射. 并且，存在一个 $\tilde{x}_0\in\tilde{V}$，$\tilde{x}_0\notin\widetilde{W}$. 因而

$$\{\tilde{x}\in\widetilde{W}|\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}_0)\}$$

只包含一个元素. 因为 $\pi|\widetilde{W}$ 是一个覆盖映射，这就蕴涵着 $\pi:\widetilde{W}\to V$ 是一个同胚.

令 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 是一族坐标系，使得若我们令 $\omega_i = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n(\varphi_i(x) = (x_1, \cdots, x_n))$，则对于 $x\in U_i$，我们有 $\omega_i(x)\in\widetilde{W}$，并且 $V = \bigcup U_i$（这样的一个族是存在的；若对于某个 x_0，$\omega_i(x_0)\notin\widetilde{W}$，我们就用 $(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$ 代替 $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$）. 若在 $U_i\cap U_j$ 上 $\omega_i = d_{ij}\omega_j$，则由 H 上等价关系的定义我们知道，在 $U_i\cap U_j$ 上 $d_{ij} > 0$. 因而，由命题 2.7.2，V 是可定向的.

2.7.6 推论 一个连通的，单连通流形是可定向的.

这是命题 2.7.5 的一个直接推论.

显然，$\tilde{V}$ 具有一个自然的 C^k 结构(例 2.1.7.b). 可以证明，总是存在（即使当 V 不是可定向时）一个 n-形式 $\tilde{\omega}$，使得对于任何 $\xi\in\tilde{x}\in\tilde{V}$，我们有 $\tilde{\omega}(\tilde{x}) = \lambda\pi_x^*(\xi)$，$x = \pi(\tilde{x})$，其中 $\lambda > 0$. 由此即得：$\tilde{V}$ **总是可定向的**.

§2.8. 具有边界的流形

令 $\boldsymbol{R}_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n|x_1\geqslant 0\}$. 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}_+^n$ 的一个开子集. Ω 上的一个函数 f 称为是 C^k 类的，如果存在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集 Ω' 和一个函数 $F\in C^k(\Omega')$，使得 $F|\Omega = f$；可以类似地定义从 Ω 到 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 C^k 映射.

2.8.1 定义 令 V 是一个 Hausdorff 拓扑空间. 假设给定一个族

$\{(U_i, \varphi_i)\}$，其中 U_i 是 V 中的开集，φ_i 是从 U_i 到 $\boldsymbol{R}_+^n$ 的一个开集上的同胚映射，使得对于所有 i, j，映射 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}|\varphi_i(U_i\cap U_j)$ 是 C^k 的，则我们说这个族在 V 上定义了一个具有边界的 C^k 流形结构。此时，V 上的一个 C^k 结构是具有上述性质的一个最大的族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$。

对于一个具有边界的 C^k 流形 $(k\geqslant 1)$，我们可用如对于通常的 C^k 流形相同的方式来定义 C^k 函数和 C^k 芽，切向量，微分形式，定向，等等。我们假设，V 是一个有可数基的具有边界的 C^k 流形。

我们考虑元素 $f\in C_{a,k}$，$a\in V$。若对于所有充分接近 a 的 x，$f(x)\geqslant 0$（对于芽 f 的某个表示），则我们记为 $f\geqslant 0$。

2.8.2 定义 令 V 是一个具有边界的 C^k 流形。我们说一个点 $a\in V$ 是一个**内点**，若存在一个坐标系 (U, φ)，$a\in U$，使得 $\varphi(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集（即，$\varphi(U)$ 不碰到 $\boldsymbol{R}_+^n=\{(t_1,\cdots,t_n)\in\boldsymbol{R}^n|t_1\geqslant 0\}$ 中的集合 $(t_1=0)$）。一个点称为一个**边界点**，若它不是内点，我们用 ∂V 表示 V 的边界点的集合。

注意，$a\in V$ 属于 ∂V，当且仅当存在一个坐标系 (U, φ)，$a\in U$，使得 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}_+^n$，并且 $\varphi(a)=0$。关于这样的一个坐标系，我们有

$$\partial V\cap U=\{x\in U|x_1=0，其中\ \varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)\}.$$

显然，从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 上的映射 $(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(x_2,\cdots,x_n)$ 诱导了一个从 $\partial V\cap U$ 到 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 的一个开集上的同胚，我们用 ψ 表示这个同胚。再者，若 (U,φ)，(U',φ') 是 V 上的两个坐标系（使得 $U\cap U'\cap\partial V\neq\varnothing$），且若 ψ，ψ' 分别表示定义在 $\partial V\cap U$ 和 $\partial V\cap U'$ 上的相应的同胚映射，则显然

$$\psi'\circ\psi^{-1}|\psi(U\cap U'\cap\partial V)$$

是 C^k 映射

$$\varphi'\circ\varphi^{-1}|\varphi(U\cap U')$$

在集合 $t_1=0$ 上的限制，因而它本身是一个 C^k 映射，所以我们得到：

2.8.3 命题 一个具有边界的 C^k 流形 V 的边界具有一个自然的 C^k 流形（没有边界）的结构。此外，容易知道（自然的内射映射 ∂V

$\to V$ 使得) ∂V 是 V 的一个闭的 C^k 子流形,因而我们将 ∂V 在 $a\in\partial V$ 处的切空间 $T_a(\partial V)$ 看作 $T_a(V)$ 的一个子空间.

2.8.4 定义 令 V 是一个具有边界的 C^k 流形, 并令 $a\in V$. 一个切向量 $X\in T_a(V)$ 称为正的(或者, ∂V 的一个内法线), 如果对于任何 $f\in \boldsymbol{m}_{a,k}$, $f\geqslant 0$, 我们有 $X(f)\geqslant 0$, 并且, 至少存在一个 $f\in\boldsymbol{m}_{a,k}$, $f\geqslant 0$, 使得 $X(f)>0$.

2.8.5 注 令 a 是 V 的一个内点,则我们断言,在 a 处不存在正的切向量. 事实上, 若 $f\in\boldsymbol{m}_{a,k}$, $f\geqslant 0$, 则 f 在 a 处有一个局部极小值. $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开集中的一个 C^1 函数,在某点处有局部极小值,则这个函数的诸一阶偏导数在该点为 0, 从这一事实我们得到,对任何 $X\in T_a(V)$, 有 $X(f)=0$.

2.8.6 命题 令 $a\in\partial V$, 并令 (U,φ) 是 a 处的一个坐标系,使得 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^n_+$, $\varphi(a)=0$. 令 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$, 并对 $X\in T_a(V)$, 令

$$X=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a.$$

则 X 是正的,当且仅当 $c_1>0$.

证明 若 $f\in\boldsymbol{m}_{a,k}$, $f\geqslant 0$, 则由

$g(x_2,\cdots,x_n)=f(0,x_2,\cdots,x_n)$ $[\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)]$

定义的函数 $g\in\boldsymbol{m}_{0,k}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 在 0 处有一个局部极小值. 因而对于 $\nu\geqslant 2$, $(\partial g/\partial x_\nu)_0=0$. 由此即得 $X(f)=c_1(\partial/\partial x_1)_a f$. 再者,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a f&=\lim_{h\to+0}h^{-1}\{f(h,0,\cdots,0)-f(0,\cdots,0)\}\\&=\lim_{h\to+0}h^{-1}f(h,0,\cdots,0)\geqslant 0.\end{aligned}$$

此外

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a x_1=1.$$

由上述这些即得命题的证明.

2.8.7 命题 若 $a\in\partial V$, X_1, X_2 是 a 处的两个正切向量, 则存在一个 $\lambda>0$, 使得 $X_1-\lambda X_2\in T_a(\partial V)$.

证明 若 (U, φ) 是 a 处的一个坐标系，$\varphi(a) = 0$，我们令

$$X_j = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^{(j)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a.$$

选取 $\lambda > 0$，使得

$$c_1^{(1)} - \lambda c_1^{(2)} = 0$$

(由命题 2.8.6，这是可能的)，则 $X_1 - \lambda X_2 \in T_a(\partial V)$.

2.8.8 定义 一个元素 $\omega \in T_a^*(V)$ $(a \in \partial V)$ 称为正的，若对于所有正的 $X \in T_a(V)$，$\omega(X) > 0$.

用局部坐标的语言，若 (U, φ) 是 a 处的一个坐标系，$\varphi(a) = 0$，$\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，则 ω 有这样的形式：$c(dx_1)_a$，$c > 0$.

2.8.9 命题 V 的一个定向诱导了 ∂V 的一个自然的定向.

证明 令 ω 是 V 上的一个处处非零的 n-形式. 我们用坐标系族 $\{(U_i', \varphi_i')\}$ 覆盖 ∂V，使得若

$$\omega_i' = dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad [\varphi_i'(x) = (x_2, \cdots, x_n)],$$

则对于任何 $y \in U_i'$ 和任何正的 $e \in T_y^*(V)$ (参阅定义 2.8.8)，我们有

$$e \wedge \omega_i'(y) = -\lambda \omega(y),$$

其中 $\lambda > 0$(我们把 $\wedge^{n-1} T_y^*(\partial V)$ 看作为 $\wedge^{n-1} T_y^*(V)$ 的一个子空间). 直接可得在 $U_i' \cap U_j'$ 中 $\omega_i' = d_{ij}' \omega_j'$，$d_{ij}' > 0$. 从命题 2.7.2 的证明得到，存在一个 ∂V 上的 $(n-1)$-形式 ω'，使得 $\omega_i' = g_i' \omega'$，其中，在 U_i' 中 $g_i' > 0$.

2.8.10 注 若 D 是 C^k 流形 V 中的一个开集，使得对于任何 $a \in \overline{D} - D$，在 V 中存在一个邻域 U 和 U 上的一个 C^k 函数 g，满足

$$(dg)_a \neq 0, \quad D \cap U = \{x \in U \mid g(x) > 0\},$$

则 $\overline{D}$ 是一个具有边界的 C^k 流形，并且，$\partial \overline{D}$ 与 D 的拓扑边界 $\partial D = \overline{D} - D$ 是一致的.

这是秩定理的直接推论.

2.8.11 注 注意，如果我们用通常的 n-形式 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 给 $\boldsymbol{R}_+^n$ 以定向，用 $(n-1)$-形式 $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 给 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 以定向，则根据命题 2.8.9 所诱导的 $\partial \boldsymbol{R}_+^n$ 的定向与通常的定向相反.

§2.9. 积 分 运 算

在引进任一可定向流形上的积分之前，我们要证明多重积分的变量代换公式．下面的证明是属于 J. Schwartz [1954] 的．

2.9.1 定理 令 Ω, Ω' 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两个开集，$h:\Omega'\to\Omega$ 是一个 C' 微分同胚．则，如果 f 是一个连续函数，它有紧支集包含在 Ω 中，那么我们就有

2.9.2 $$\int_{\Omega} f(x)dx_1\cdots dx_n=\int_{\Omega'} f\circ h(y)|\det\ dh(y)|dy_1\cdots dy_n.$$

(自然，$|\det\ dh(y)|$ 是 y 处的微分 $dh(y)$ 的行列式的绝对值)．

证明 首先，在 h 是一个线性变换时我们来证明此定理．令 A 表示 h 关于 $\boldsymbol{R}^n$ 的典则基的矩阵．由关于初等因子的定理（例如，参阅 Bourbaki[1952]），可以把 A 写成为有限多个矩阵 A_ν 的乘积，每个 A_ν，或者是一个对角矩阵(对角元素非零)，或者是一个初等矩阵，即，相应于下述一些线性变换之一的矩阵：

(a) $$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_{j-1},x_k,x_{j+1},\cdots,x_{k-1},x_j,x_{k+1},\cdots,x_n)$$

[即，交换 x_j 和 x_k, $j<k$]，

(b) $$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_n).$$

显然，只需对于这些变换中的每一个分别证明 (2.9.2) 即可．对于对角矩阵和变换 (a)，这是 Fubini 定理的一个平凡的推论．对于变换 (b)，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega'} f\circ h(y)|\det\ dh(y)|dy_1\cdots dy_n\\&=\int_{\mathbf{R}^n} f(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\\&=\int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx_2\cdots dx_n\int_{\mathbf{R}} f(x_1+x_2,\cdots,x_n)dx_1\\&=\int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx_2\cdots dx_n\int_{\mathbf{R}} f(x_1,\cdots,x_n)dx^1\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx_1\cdots dx_n = \int_{\Omega} f(x)dx_1\cdots dx_n.$$

为了证明一般性的结论，现在我们如下进行．只需证明：对于具有紧支集的任何非负连续函数 f，我们有[1]

2.9.3 $$\int_{\Omega} f(x)dx_1\cdots dx_n \leqslant \int_{\Omega'} (f\circ h)(y)|\det dh(y)|dy_1\cdots dy_n.$$

为了看到这一点，我们注意，交换 Ω, Ω'，并对于变换 h^{-1} 和 Ω' 上的函数 $f\circ h$ 应用 (2.9.3)，即得到关于非负 f 的 (2.9.2)．由于具有紧支集的任何连续函数是两个具有紧支集的非负连续函数的差，这就给我们以一般情形下的 (2.9.2)．更进一步，只需证明下述事实：若 Q 是一个包含在 Ω' 中的闭的立方体(各边相等)，则我们有

2.9.4 $$m(h(Q)) \leqslant \int_{Q} |\det dh(y)|dy_1\cdots dy_n,$$

其中 $m(S)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中可测集 S 的 Lebesgue 测度．

事实上，这蕴涵着(2.9.3)，因为紧支集的非负连续函数 $f\circ h$ 是有限线性组合 $\Sigma c_j \chi_{Q_j}$ 的一致极限，其中 $c_j \geqslant 0$，Q_j 是闭立方体(各边相等)，χ_S 是 S 的特征函数(在 S 上等于 1，在 S 外等于 0)．

(2.9.4) 的证明 令 K 是 Ω' 中的一个闭立方体，各边长等于 δ．若 $M = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，我们令

$$\|M\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

当 I 是单位矩阵时，我们有 $\|I\| = 1$．若 $l: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 是一个具有矩阵 M 的线性变换时，我们记 $\|l\| = \|M\|$．

映射 $h: \Omega' \to \Omega$ 由 n 个函数所给出，$h = (h_1, \cdots, h_n)$．对于 $x, y \in K$，由定理 1.1.9，我们有

$$h_j(x) - h_j(y) = \sum_k \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(t_j)(x_k - y_k),$$

其中 $t_j \in K$．因而

$$|h_j(x) - h_j(y)| \leqslant \delta\|(dh)(t_j)\| \leqslant \delta \sup_{a\in K}\|dh(a)\|.$$

---

1) 原文将 $\det dh(y)$ 误为 $\det\ h(y)$．——译者注

由此即得

2.9.5 $$m(h(K)) \leqslant \delta^n\{\sup_{a\in K}\|dh(a)\|\}^n = m(K)\sup_{a\in K}\|dh(a)\|^n.$$

令 $a\in K$，l 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的线性变换，它由

$$l^{-1} = (dh)(a)$$

所定义．令 $g = l\circ h$．由关于线性变换的积分等式(2.9.2)，则有

$$m(g(K)) = |\det l|^{-1}m(h(K)).$$

如果我们把(2.9.5)应用于变换 g，我们就得到

2.9.6 $$m(h(K))\leqslant|\det dh(a)|\,m(K)\sup_{y\in K}\|dh(a)^{-1}\circ dh(y)\|^n.$$

显然，当 $\delta\to 0$ 时，对于 Q' 的一个紧子集中的 y，$dh(a)^{-1}\circ dh(y)$ 一致地收敛于 I．因而存在一个函数 $\lambda:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，使得当 $\delta\to 0$ 时 $\lambda(\delta)\to 0$，并且

$$\sup_{y\in K}\|dh(a)^{-1}\circ dh(y)\|^n \leqslant 1+\lambda(\delta),\quad y\in Q,$$

[Q 是 Q' 中的一个闭立方体]．我们把 Q 分成边长 $\delta = (Q$ 的边长$)/N$ 的 N^n 个立方体 K_j．令 $a_j\in K_j$．由(2.9.6)，我们即有

$$m(h(Q)) \leqslant \sum_j m(h(K_j))$$

$$\leqslant (1+\lambda(\delta))\sum_j|\det\ dh(a_j)|\,m(K_j).$$

当 $N\to\infty$时，右端收敛于

$$\int_Q |\det\ dh(y)|\,dy_1\cdots dy_n,$$

这就证明了(2.9.4)，因而证明了定理．

现在我们来讨论在定向流形上的积分．令 V 是一个 n 维可定向的 C^k 流形 $(k\geqslant 1)$，它可以有边界，也可以是没有边界的．令 ω 是 V 上的一个具有紧支集的连续 n-形式．我们假设 V 有可数基．因为我们假设 V 是可定向的，因而在 V 上存在一个没有零点的 n-形式 ω_0．令 (U,φ)，(U,ψ) 是两个坐标系（它们具有相同的 U）．我们记

$$\varphi(x) = (x_1,\cdots,x_n),\ \psi(x) = (y_1,\cdots,y_n),$$

并令

$$\theta_1 = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \ \theta_2 = dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n,$$

则

$$\theta_j = f_j \omega_0, \ f_j \in C^0(U), \ j = 1, 2.$$

我们假定这样选取坐标系，使得 $f_i > 0$；(如果必要的话，用 $-x_n$ 或 $-y_n$ 代替 x_n 或 y_n). 这样的坐标系称为关于 ω_0 是正的. 我们有

$$\omega = g_1\theta_1 = g_2\theta_2, \ g_j \in C^0(U), \ j = 1, 2.$$

2.9.7 注 我们断言，若 g_1 (因而 g_2) 有紧支集包含在 U 中，则我们有

$$\int_{\varphi(U)} g_1 \circ \varphi^{-1} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\phi(U)} g_2 \circ \phi^{-1} dy_1 \cdots dy_n.$$

事实上，若我们令

$$u(x) = \det \ d(\varphi \circ \phi^{-1})(\phi(x)), \ x \in U,$$

则我们有

$$\theta_1(x) = u(x)\theta_2(x),$$

因而 $u(x) = f_1(x)/f_2(x) > 0$. 这样，我们可以应用定理 2.9.1 和下述事实:

$$g_1 \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) d(\varphi \circ \phi^{-1})(\phi(x))$$
$$= g_2 \circ \phi^{-1}(\phi(x));$$

这就得到了论断 2.9.7.

现在我们可以定义 ω 在 V 上的积分了. 令 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 是 V 上的一族坐标系，$V = \bigcup U_i$, 使得若 θ_i 是与 $\varphi_i(x) = (x_1, \cdots, x_n)$ 相联系的形式 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 则在 U_i 上 $\theta_i = f_i \omega_0$, 其中 $f_i > 0$. 令 $\{\eta_i\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的一个单位分解. 令

$$\omega = g_i \theta_i \quad 在 \ U_i \ 上.$$

我们定义

2.9.8 $$\int_V \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} (\eta_i g_i) \circ \varphi_i^{-1} dx_1 \cdots dx_n.$$

从注 2.9.7 直接可得，(2.9.8)与坐标系族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 和所选取的单

位分解 $\{\eta_i\}$ 无关。此外，若 ω_0' 是与 ω_0 定义相同定向的另一个 n-形式，则上述积分不变。

2.9.9 Stokes 定理 令 V 是一个具有可数基的 n 维定向 C^k 流形。令 ω 是 V 上的一个具有紧支集的 $C^1(n-1)$-形式。则我们有

$$\int_{\partial V}\omega=\int_V d\omega.$$

特别，当 V 是紧流形时，上述公式对于所有 C^1 形式 ω 都成立。

证明 令 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 是一族坐标系，使得

$$\theta_i=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=f_i\omega_0,$$
$$\varphi_i(x)=(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 $f_i>0$。令 $\{\eta_i\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的一个单位分解。我们只需证明

$$\int_{\partial V}\eta_i\omega=\int_V d(\eta_i\omega).$$

考虑两个情形。

情形 I. 假设 $U_i\cap\partial V=\varnothing$；则 $\varphi_i(U_i)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，并且

$$\int_{\partial V}\eta_i\omega=0.$$

我们可以假设 U_i 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集(由注 2.9.7)。令

$$\eta_i\omega=\sum_{j=1}^n g_j dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

其中在 dx_j 上的符号⌒意味着 dx_j 不出现，则我们有

$$d(\eta_i\omega)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial g_j}{\partial x_j}(-1)^{j-1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

因此

$$\int_V d(\eta_i\omega)=\sum_{j=1}^n\int_{U_i}(-1)^{j-1}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$
$$=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}dx_1\cdots dx_n=0,$$

这是因为对于每个 j，g_j 有紧支集，因而

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

情形 II. $U_i \cap \partial V \neq \varnothing$. 在此情形，$\varphi_i(U_i)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^n$ 中的一个开集，并且

$$\varphi_i(U_i) \cap \{x \in \boldsymbol{R}_+^n | x_1 = 0\} \neq \varnothing.$$

我们可以再一次假设 U_i 是 $\boldsymbol{R}_+^n$ 中的一个开集. 如在情形 I 中一样，若

$$\eta_i \omega = \sum_{j=1}^n g_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$d(\eta_i \omega) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

则我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n = 0 \quad 若 \ j \neq 1.$$

并且，当 $j \neq 1$ 时，

$$g_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n | \partial V = 0$$

(参阅注 2.5.16). 此外，

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \cdots \int_0^{\infty} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1$$

$$= -\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n,$$

因而

$$\int_V d(\eta_i \omega) = -\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\partial V} \eta_i \omega$$

(参阅注 2.8.11). 这就证明了定理.

§2.10. 单参数群

在本节中 V 表示一个具有可数基的 n 维 C^k 流形，$k \geq 3$.

2.10.1 定义 令 $g:\boldsymbol{R}\times V\to V$ 是一个 C^r 映射. 对于 $t\in\boldsymbol{R}$, 令 $g_t:V\to V$ 是映射 $x\longmapsto g(t,x)$. 我们称 g 是 V 的 C^r 变换的一个单参数群,若对于每个 t, g_t 是一个从 V 到 V 上的 C^r 微分同胚, 并且对于 $t,s\in\boldsymbol{R}$, 我们有

$$g_{s+t}=g_s\circ g_t;$$

特别, $g_0=\mathrm{id}_V$.

令 U 在 V 中是开的,令 $\varepsilon>0$ 和 $I=\{t\in\boldsymbol{R}\,|\,|t|<\varepsilon\}$. 令 $g:I\times U\to V$ 是一个 C^r 映射, $g_t:U\to V$ 是如上所述的映射 $x\longmapsto g(t,x)$. 则称 g 是从 U 到 V 中的 C^r 变换的一个局部单参数群,若对于每个 $t\in I$, g_t 是一个从 U 到 V 的一个开子集上的 C^r 微分同胚, g_0 是恒等映射, 并且对任意的 s, t, $s+t\in I$, 和任意的 x, $g_t(x)\in U$, 我们有

$$g_{s+t}(x)=g_s\circ g_t(x).$$

令 $g:I\times U\to V$ 是一个 C^r 变换的局部单参数群. 我们如下地定义一个 U 上的 C^{r-1} 向量场 $X=X_g$.

令 $a\in U$, $f\in C_{a,k}$. 我们令

$$X(a)(f)=\left.\frac{d(f\circ g_t(a))}{dt}\right|_{t=0};$$

注意, 因为 g_0 是恒等映射, 因此对于足够小的 t, $g_t(a)$ 接近于 a. 反之,我们有:

2.10.2 命题 令 X 是 V 上的一个 C^{k-1} 向量场, $a\in V$, 则存在 a 的一个邻域 U 和从 U 到 V 中的变换的一个局部单参数群, 使得在 U 上 X 由 g 所诱导,即,在 U 上 $X=X_g$.

证明 只需在 V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开集的情形下证明这个命题即可. 令向量场 X 由

$$X(x)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x,\quad x\in V$$

所给出. 由定理 1.8.12, 存在一个 $\delta>0$ 和 a 的一个邻域 U_0, 以及一个 C^{k-1} 映射

$$g:I_0\times U_0\to V\qquad(I_0=\{t\in\boldsymbol{R}\,|\,|t|<\delta\}),$$

使得若对于 $x\in V$ 我们令 $a(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))$，则我们有[1]

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)=a(g(t,x)),\ g(0,x)=x,\ x\in U_0.$$

我们断言，g 是一个局部单参数群．为了证明这个论断，我们令 $g_t(x)=g(t,x)$，并选取

$$I=\{t\mid |t|<\varepsilon\},\ \varepsilon>0$$

和 a 的一个足够小的邻域 U，使得

$$g_{s+t}(U)\subset U_0 \quad 对于\ s,t\in I.$$

对于固定的 $s\in I$，在 U 上令 $h_t=g_t\circ g_s$．我们立刻知道，h_t, g_{t+s} 都满足微分方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a(u(t,x)),\ u(0,x)=g_s(x),\ x\in U,\ t\in I.$$

因而，由定理 1.8.4 中的唯一性论断，我们有

$$h_t=g_{t+s},\ 即,\ g_{t+s}=g_t\circ g_s.$$

特别，$g_t\circ g_{-t}=g_0=$ 恒等映射，因而每个 g_t 是一个 C^{k-1} 微分同胚．

若 $f\in C_{b,k}$，$b\in U$，则我们有

$$\frac{d(f\circ g_t(b))}{dt}=\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(b)\frac{dg_{t,\nu}(b)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$[g_t=(g_{t,1},\cdots,g_{t,n})]$$

$$=\Sigma a_\nu(b)\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(b)=X(b)(f),$$

因而局部单参数群 g 在 U 上诱导了 X．

2.10.3　注　从定理 1.8.4 的唯一性论断得到，上述局部单参数群 g 在一个明显的意义下是唯一的．

2.10.4　定理　令 X 是 V 上的一个具有紧支集的 C^{k-1} 向量场，则存在一个唯一的 V 的 C^{k-1} 变换的单参数群 g，在 V 上它诱导了 X；并且，当 x 在 V 的一个紧子集之外时，对于所有的 t，$g(t,x)=x$．

证明　令 K 是一个紧集，使得当 $a\notin K$ 时 $X(a)=0$．由命题

1) 原文将 $x\in U_0$ 误为 $x\in U$．——译者注

2.10.2，对于任何 $a\in K$，存在一个邻域 U_a 和一个局部单参数群 $g_t^{(a)}:U_a\to V(\{t|<\varepsilon(a)\})$，在 U_a 上它诱导了 X. 选取 a_ν, $1\leqslant\nu\leqslant p$，使得

$$U=\bigcup_{1\leqslant\nu\leqslant p}U_{a_\nu}\supset K,$$

并令

$$\varepsilon=\min_\nu\ \varepsilon(a_\nu).$$

若 $U_{a_\nu}\cap U_{a_\mu}\neq\varnothing$，则在 $U_{a_\nu}\cap U_{a_\mu}$ 上 $g_t^{(a_\nu)}$, $g_t^{(a_\mu)}$ 诱导同一个向量场，因而对于 $|t|<\varepsilon$，它们是相等的. 因而我们可以在 U 上如下地定义 g_t: 当 $x\in U_{a_\nu}$ 时 $g_t(x)=g_t^{(a_\nu)}(x)$. 此外，若 $x\in U$, $x\notin K$，则 $X(x)=0$，因而对于所有 $f\in C_{x,k}$，我们有

$$\frac{df\circ g_t(x)}{dt}=0\qquad 对于 t=0.$$

从定理 1.8.4 中的唯一性论断即得 $g_t(x)=x$. 因而，对于 $x\notin K$，令 $g(t,\ x)=x$，则我们就把 $g:I\times U\to V$ 开拓为一个映射 g: $I\times V\to V$; 这里 $I=\{t||t|<\varepsilon\}$. 并且，对于任何 $x\in V$，若 t, s, $t+s\in I$，则我们有 $g_{t+s}(x)=g_t\circ g_s(x)$.

现在，若 $t\in\boldsymbol{R}$ 是任意的，我们就选取一个整数 $p>0$，使得 $t'=t/p\in I$，并且定义

$$g_t=g_{t'}\circ\cdots\circ g_{t'}$$

($g_{t'}$ 复合 p 次). 容易知道，它定义了一个 C^{k-1} 映射 $g:\boldsymbol{R}\times V\to V$, g 是一个单参数群，并且开拓了我们的映射 $g:I\times V\to V$; 特别，g 诱导了向量场 X.

2.10.5 注 令 U 是 V 的一个开子集，$\sigma:U\to V$ 是一个从 U[1] 到 V 的一个开子集上的 C^r 微分同胚. 令 X 是 U 上的一个向量场，则 σ 诱导了 $U'=\sigma(U)$ 上的一个向量场 $\sigma_*(X)$，其中

$$\sigma_*(X)(\sigma(a))=\sigma_{*a}(X(a))$$

(参阅注 2.4.5). 若 $f\in C^k(U')$，则我们有

---

1) 原文将 U 误为 V. ——译者注

$$\sigma_*(X)(f) = X(f\circ\sigma)\circ\sigma^{-1}.$$

因而,若 X, Y 是 U 上的两个向量场, $f\in C^k(U')$, 则我们有

$$\begin{aligned}[\sigma_*(X), \sigma_*(Y)](f) &= \sigma_*(X)\{Y(f\circ\sigma)\circ\sigma^{-1}\} \\ &\quad - \sigma_*(Y)\{X(f\circ\sigma)\circ\sigma^{-1}\} \\ &= (X(Y(f\circ\sigma)) - Y(X(f\circ\sigma)))\circ\sigma^{-1} \\ &= \sigma_*([X, Y])(f),\end{aligned}$$

因此我们有

2.10.6 $$\sigma_*([X, Y]) = [\sigma_*(X), \sigma_*(Y)].$$

现在令 $\sigma: U\to U'$ 是如上所述的一个 C^r 微分同胚. 令 $W\Subset U$, $W' = \sigma(W)$. 令 $g: I\times U\to V$ 是一个局部单参数群, 它诱导了 U 上的向量场 X. 则当 I 足够小时 $g(I\times W)\subset U'$, 因而 $t\longmapsto \sigma\circ g_t\circ\sigma^{-1}$ 定义了一个局部单参数群 $g': I\times W'\to V$. 若 $f\in C^k(W')$ 和 $a\in W'$, 则我们有

$$\sigma_*(X)(f)(a) = X(f\circ\sigma)\circ\sigma^{-1}(a) = \left.\frac{d(f\circ\sigma\circ g_t\circ\sigma^{-1}(a))}{dt}\right|_{t=0},$$

因而在 W' 上 g' 诱导了向量场 $\sigma_*(X)$. 由此我们得到:

2.10.7 推论 若 $\sigma(W) = W'$ 在 U 中还是相对紧的, 则, 对于 $x\in W$ 和所有充分小的 t 我们有

$$\sigma\circ g_t(x) = g_t\circ\sigma(x),$$

当且仅当对于 $a\in W$, 我们有

$$\sigma_{*,a}(X(a)) = X(\sigma(a)).$$

2.10.8 定义 令 $g: I\times U\to V$ 是 C^r 变换的一个局部单参数群, $r > 2$, X 是 U 上的一个向量场. 我们说, *g 保持 X 不变*, 如果对于任何 $a\in U$ 和所有足够小的 t, 我们有

$$(g_t)_{*,a}(X(a)) = X(g_t(a)).$$

现在令 $g: I\times U\to V$ 是一个如上所述的 C^r 变换的单参数群, 并令 U' 是一个开集, $U'\Subset U$. 令 Y 是 U 上的一个 C^r 向量场, $r\geqslant 2$. 对于所有足够小的 t, 我们用

$$Y_t(f) = Y(f\circ g_t)\circ g_{-t} = (g_t)_*(Y)(f)$$

定义 U' 上的一个向量场 Y_t; 用 $(dY_t/dt)(f)=dY_t(f)/dt$ 定义一个向量场 dY_t/dt.

2.10.9 命题 我们断言,对于足够小的 t, 在 U' 上我们有

$$dY_t/dt=[Y_t, X],$$

其中 X 是由 g 诱导的 U 上的向量场.

证明 我们令 $Z_t=dY_t/dt$. 若 $f\in C^k(U)$, 则我们有

$$\begin{aligned}Z_0(f)&=\lim_{t\to 0}t^{-1}\{Y(f\circ g_t)\circ g_{-t}-Y(f)\}\\&=\lim_{t\to 0}t^{-1}\{Y(f\circ g_t)-Y(f)-Y(f)\circ g_t+Y(f)\}\circ g_{-t}\\&=\lim_{t\to 0}t^{-1}Y(f\circ g_t-f)-\lim_{t\to 0}t^{-1}(Y(f)\circ g_t-Y(f)),\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0}g_{-t}$ 是恒等映射,所以若最后两个极限在 U' 上一致存在,则上面的等式成立. 由 X 的定义,在 U' 上我们一致地有

$$X(Y(f))=\lim_{t\to 0}t^{-1}\{Y(f)\circ g_t-Y(f)\}.$$

现令 $h(t, x)=f\circ g_t(x)$. 显然, 若 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中包含 0 的一个足够小的区间,则 $h\in C^2(I\times U')$. 因而, 函数

$$F=\begin{cases}t^{-1}(f\circ g_t-f)=t^{-1}(h(t,x)-h(0,x)) & \text{对于 } t\neq 0\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(0,x) & \text{对于 } t=0\end{cases}$$

属于 $C^1(I\times U')$. 因而

$$\lim_{t\to 0}t^{-1}Y(f\circ g_t-f)=Y(\lim_{t\to 0}t^{-1}(f\circ g_t-f))=Y(X(f)).$$

因而对于 $f\in C^k(U)$, 有

$$Z_0(f)=[Y, X](f)=[Y_0, X](f).$$

显然,这蕴涵着在 U' 上 $Z_0=[Y_0, X]$.

如果 t_0 足够小,则我们有

$$(g_{t_0})_*Z_0=Z_{t_0}{}^{1)} \text{ 和}$$

$$(g_{t_0})_*[Y_0, X]=[(g_{t_0})_*Y_0, (g_{t_0})_*X]=[Y_{t_0}, X] \text{ 在 } U' \text{ 上},$$

这就证明了命题.

---

1) 原文将 Z_{t_0} 误为 Z_t. ——译者注

2.10.10 命题 令 g, $h: I \times U \to V$ 是两个局部单参数群，它们分别诱导了 U 上的两个 C^r 向量场 X, $Y(r \geqslant 2)$. 则，对于任何 $U' \Subset U$，对于 $x \in U'$ 和充分小的 t, s, 我们有 $g_t \circ h_s(x) = h_s \circ g_t(x)$，当且仅当在 U 上 $[X, Y] = 0$.

证明 若对于充分小的 t, s, g_t, h_s 在 U' 上可交换，则我们立即知道 g_t 保持 Y 不变(定义 2.10.8). 因而(由命题 2.10.9)在 U'上

$$0 = \left.\frac{dY_t}{dt}\right|_{t=0} = [Y, X].$$

因为 $U' \Subset U$ 是任意的，所以在 U 上

$$[X, Y] = -[Y, X] = 0.$$

反之，若 $[X, Y] = 0$, 则(由命题 2.10.9) 我们有

$$dY_t/dt = (g_t)_*[Y, X] = 0,$$

并且 g_t 保持 Y 不变. 然后，从推论 2.10.7 即得证.

2.10.11 注 关于复解析流形 V 和全纯向量场，本节的所有结果都有其类似的命题. 我们引进全纯(局部)单参数群：它是具有与定义 2.10.1 中所述性质相类似的性质的全纯映射 $g: (I \times U)\boldsymbol{C} \times V \to V$. 那么，和前面一样，全纯向量场和全纯局部单参数群相互对应. 群中元素的交换性仍然表示为 Poisson 括号等于 0.

这些命题的证明与以前给出的证明是一样的，故在此略去. 有关这方面的情形，可参阅 Nomizu [1956].

§ 2.11. Frobenius 定理

令 V 是一个具有可数基的 n 维 C^k 流形 $(k \geqslant 3)$.

2.11.1 定义 V 上一个 p 秩的微分组或者分布 $\mathfrak{D}$ 是一个对应，对于每个点 $a \in V$, 它相应于一个 p 维子空间 $\mathfrak{D}(a) \subset T_a(V)$. $\mathfrak{D}$ 称为 C^r 类可微的 $(0 \leqslant r < k)$, 若每个 $a \in V$ 有一个邻域 U, 在 U 中存在 C^r 向量场 $X_1, \cdots, X_p$, 使得对于任何 $b \in U, X_1(b), \cdots, X_p(b)$ 构成 $\mathfrak{D}(b)$ 的一个基. 我们称诸 X_i 在 U 上生成 $\mathfrak{D}$.

2.11.2 定义 令 $\mathfrak{D}$ 是一个 p 秩微分组. 一个子流形 $i: W \to V$ 称

为 $\mathfrak{D}$ 的一个积分(或者，积分流形)，如果对于任何 $a\in W$，我们有

$$i_{*,a}(T_a(W))\subset\mathfrak{D}(i(a)).$$

我们也称一个 C^r 映射 $f:V'\to V$ 是 $\mathfrak{D}$ 的一个积分，如果对于 $a\in V'$，我们有

$$f_{*,a}(T_a(V'))\subset\mathfrak{D}(f(a)).$$

注意，一个积分的子流形仍是一个积分.

2.11.3 定义 我们说 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的，如果对于任何 $a\in V$，存在一个坐标系 (U,φ)，$a\in U$，$\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$，使得对于所有 c_j，$p<j\leqslant n$，由

$$U_c=\{x\in U\,|\,x_j=c_j,\ p<j\leqslant n\}$$

给出的子流形是 $\mathfrak{D}$ 的积分.

令 $\mathfrak{D}$ 是一个完全可积组，并令 $a\in V$. 选取一个坐标系 (U,φ)，$a\in U$，使得定义 2.11.3 成立，则我们有：

2.11.4 命题 若 $i:W\to U$ 是一个积分，并且 W 是连通的，则对于某个 $c=(c_{p+1},\cdots,c_n)$，$i(W)\subset U_c$.

证明 令 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$. 对于任何 $b\in U$，显然 $T_b(U_c)$ $[b=(b_1,\cdots,b_p,c_{p+1},\cdots,c_n)]$ 的维数为 p，并且 $T_b(U_c)\subset\mathfrak{D}(b)$，因而 $T_b(U_c)=\mathfrak{D}(b)$. 此外，$T_b(U_c)$ 由 $T_b(V)$ 中被诸 $(dx_j)_b(p<j\leqslant n)$ 所零化的那些向量所组成[1]. 因而，若 $i:W\to U$ 是一个积分，则 $i^*(dx_j)=0$，$p<j\leqslant n$. 因为 W 是连通的，所以这蕴涵着 $x_j\circ i$ 在 W 上是常数，这就证明了我们的论断.

特别，若 c 充分小，则子流形族 $\{U_c\}$ 与坐标系 (U,φ) 无关.

2.11.5 定义 令 $\mathfrak{D}$ 是一个 C^r 微分组. 我们说 $\mathfrak{D}$ 是对合的，如果对于任何 $a\in V$，存在一个邻域 U 和在 U 上生成 $\mathfrak{D}$ 的 C^r 向量场 $X_1,\cdots,X_p$，使得对于任何 $b\in U$，我们有

$$[X_\mu,X_\nu](b)\in\mathfrak{D}(b),\ 1\leqslant\mu,\nu\leqslant p.$$

2.11.6 注 注意，上述定义等价于下述事实：对于任何开集 $U\subset V$ 和 U 上满足下面的条件的两个 C^r 向量场 X，Y：对于 $a\in U$，有

---

1) 即，用 $(dx_j)_b$ 作用于此向量的结果为 0. ——译者注

$X(a)$, $Y(a)\in\mathfrak{D}(a)$，我们有

$$[X, Y](a)\in\mathfrak{D}(a) \qquad \text{对于 } a\in U.$$

2.11.7 命题 若 $\mathfrak{D}$ 是一个 p 秩的对合 C^r 微分组，则任何 $a\in V$ 有一个邻域 U，在 U 中存在一组向量场 X_ν，$1\leqslant\nu\leqslant p$，使得对于任何 $b\in U$，诸 $X_\nu(b)$ 生成 $\mathfrak{D}(b)$，并且在 U 中 $[X_\nu, X_\mu]=0$，$1\leqslant\nu$，$\mu\leqslant p$.

证明 令 $a\in V$，(U,φ) 是一个坐标系，$a\in U$[1].
令 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_n)$. 若 U 充分小，则存在 C^r 向量场 $Y_1,\cdots$, Y_p，使得对于 $x\in U$，$Y_1(x),\cdots,Y_p(x)$ 生成 $\mathfrak{D}$. 令

$$Y_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_x;\quad a_{\nu\mu}\in C^r(U).$$

因为 $\{Y_\nu(a)\}$ 生成一个 p 维向量空间，因此矩阵 $(a_{\nu\mu}(a))$ $(1\leqslant\nu\leqslant p,\ 1\leqslant\mu\leqslant n)$ 的秩为 p. 不失一般性，我们不妨假设，若

$$A(x)=(a_{\nu\mu}(x)),\ 1\leqslant\nu\leqslant p,\ 1\leqslant\mu\leqslant p,$$

则 $A(a)$ 的秩为 p. 若 U 充分小，则当 $x\in U$ 时矩阵 $A(x)$ 是可逆的. 令 $B(x)=(b_{\nu\mu}(x))=A(x)^{-1}$；则对于 $1\leqslant\nu,\mu\leqslant p$，$b_{\nu\mu}\in C^r(U)$. 令

$$X_\nu=\sum_{\mu=1}^{p}b_{\nu\mu}Y_\mu,$$

则 X_ν 有下述形式：

$$X_\nu=\frac{\partial}{\partial x_\nu}+\sum_{\mu>p}c_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\quad c_{\nu\mu}\in C^r(U);$$

并且，$\{X_\nu\}$ 在 U 中构成 $\mathfrak{D}$ 的一个基. 因为 $\mathfrak{D}$ 是对合的，因此我们有

$$[X_\nu, X_\mu]=\sum_{m=1}^{p}\lambda_m X_m,\quad \lambda_m\in C^r(U).$$

因为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu},\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]=0,$$

---

1) 原文将 $a\in U$ 误为 $a\in V$. ——译者注

我们即知道，若

$$[X_\nu, X_\mu] = \sum_{m=1}^{n} \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

则 $\xi_m = 0$, $1 \leqslant m \leqslant p$. 显然，对于 $m \leqslant p$, $\lambda_m = \xi_m$, 因而 $\lambda_m = 0$. 这样，$[X_\nu, X_\mu] = 0$.

2.11.8 定理 令 $X_1, \cdots, X_p$ 是 V 上的 C^r 向量场，$r \geqslant 2$, 在 V 的每个点处它们是线性无关的，并使得 $[X_\nu, X_\mu] = 0$, $1 \leqslant \nu, \mu \leqslant p$. 则对于任意的 $a \in V$, 存在 C^r 坐标系 (U, φ), $a \in U$, 使得若 $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$[1]，并且 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ 是 U 中与坐标相联系的向量场，我们即有 $X_\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\nu = 1, \cdots, p$.

证明 令 (U', φ') 是 a 处的一个坐标系，使得诸向量

$$X_1(a), \cdots, X_p(a), \left(\frac{\partial}{\partial x'_{p+1}}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)_a$$

是线性无关的；这里 $\varphi'(x) = (x'_1, \cdots, x'_n)$, 而 $\partial/\partial x'_i$ 表示 U' 中与坐标相联系的向量场. [显然，这样的坐标系是存在的；我们至多只须在 $\mathbf{R}^n$ 上施行一个线性变换.] 我们假设 $\varphi'(a) = 0$.

令

$$g^{(\nu)}: I \times U' \to V$$

是一个 C^r 变换的局部单参数群，它在 U' 上诱导了 X_ν; 这里 $I = \{t \in \mathbf{R} \mid |t| < \varepsilon\}$; 若 U' 充分小，则 $g^{(\nu)}$ 是唯一确定的（命题 2.10.2 和注 2.10.3).

令 $t_1, \cdots, t_p, x'_{p+1}, \cdots, x'_n$ 是 n 个绝对值 $< \delta$ 的实数，其中 $\delta > 0$. 我们用

$$\begin{aligned} &h(t_1, \cdots, t_p, x'_{p+1}, \cdots, x'_n) \\ &\quad = g^{(1)}_{t_1} \circ \cdots \circ g^{(p)}_{t_p} \circ \varphi'^{-1}(0, \cdots, 0, x'_{p+1}, \cdots, x'_n) \end{aligned}$$

定义一个映射

$$h: \Omega \to V, \quad \Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < \delta\}.$$

当 δ 充分小时映射 h 是有意义的. 由定义，若 $f \in C_{a,k}$, 则

1) 原文将 $(x_1, \cdots, x_n)$ 误为 $(x_1, \cdots, x_p)$. ——译者注

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(f\circ h)(0) = X_1(a)(f)$$

(因为 $g^{(1)}$ 诱导了 X_1). 因为由假设 $[X_\nu, X_\mu] = 0$, 所以由命题 2.10.10, 诸 $g_{t_\nu}^{(\nu)}$ "可交换", 因此我们有

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu}(f\circ h)(0) = X_\nu(a)(f), \ \nu = 1, \cdots, p,$$

即,

$$h_{*,0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)_0\right) = X_\nu(a).$$

此外,

$$h_{*,0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j'}\right)_0\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j'}\right)_a, \ p < j \leqslant n$$

(这里, 记号的意义是明显的). 特别地, 这证明了 $h_{*,0}$ 的秩为 n. 因而, 由逆函数定理 2.2.10, 若 δ 足够小, 则 h 是一个从 Ω 到 V 中的一个开集 U 上的 C^r 同构. 再一次由定义得到

$$h_{*,u}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_u\right) = X_1(h(u)),$$

并且, 由诸 $g_{t_\nu}^{(\nu)}$ 的可交换性, 我们有

$$h_{*,u}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)_u\right) = X_\nu(h(u)), \ 1 \leqslant \nu \leqslant p.$$

因而, C^r 坐标系 (U, h^{-1}) 有所要求的性质.

2.11.9 Frobenius **定理** 第一个形式. V 上的一个 C^r 微分组 $\mathfrak{D}$ $(r \geqslant 2)$ 是完全可积的, 当且仅当它是对合的.

证明 由命题 2.11.7 和定理 2.11.8, 一个对合组是完全可积的. 反之, 若 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的, (U, φ) 是一个 C^r 坐标系, 使得 $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$, 并且集合

$$U_c = \{x \in U \mid x_j = c_j, \ p < j \leqslant n\}$$

$(\forall c = (c_{p+1}, \cdots, c_n) \in \boldsymbol{R}^{n-p})$ 是积分, 则 $(\partial/\partial x_\nu)_a$ $(1 \leqslant \nu \leqslant p)$ 张成切空间 $T_a(U_c)$ $(a \in U_c)$, 因而对于 $a \in U$ 它们张成 $\mathfrak{D}(a)$; 这样, $\mathfrak{D}$ 显然是对合的. [然而, 这里我们只有 $\mathfrak{D}$ 的一个 C^{r-1} 基.]

2.11.10 注 本质上我们已经用了下述事实：所考虑的向量场是 C^r 的，$r \geqslant 2$ [在命题 2.10.9 的证明中]. 然而，还用到对合的 C^1 组是 C^1 完全可积的这一事实. 这可以用与上面所用的相类似的方法加以证明. 此时我们需要 § 1.8 的一些定理和下述事实：在方程组 $dx/dt = f(x, t)$ 中，解 x 关于 t 的导数比关于所有其它变量的导数多一阶.

现在我们考虑定义微分组的另一个方法. 令 $\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$ 是 V 上的 1-形式，它们在每一点处都是线性无关的. 通过令

$$\mathfrak{D}(a) = \{X \in T_a(V) | \omega_\nu(a)(X) = 0, \text{ 对于 } p < \nu \leqslant n\},$$

我们定义一个微分组 $\mathfrak{D}$. 若诸 ω_i 是可微的，则 $\mathfrak{D}$ 也是可微的. 事实上，在一个适当的坐标系中，我们可以假设 ω_ν 有下述形式：

$$\omega_\nu = dx_\nu + \sum_{\mu \leqslant p} a_{\nu\mu} dx_\mu, \quad \nu > p, \quad a_{\nu\mu} \in C^r(U).$$

则 $\mathfrak{D}$ 就是由诸向量场

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu > p} a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant p$$

所张成的微分组，因为显然 $\omega_\nu(X_\mu) = 0$，并且 $X_1, \cdots, X_p$ 线性无关. 此外，局部地，任何一个微分组都可用这种方式得到.

2.11.11 Frobenius **定理** 第二个形式. 令 $\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$ 是在每个点处都线性无关的 C^r 1-形式，$\mathfrak{D}$ 是由它们所定义的数分组. 则 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的，当且仅当满足下述条件：

每个点 $a \in V$ 有一个邻域 U，在 U 中存在 1-形式 $\alpha_{\mu\nu}$，使得

2.11.12
$$d\omega_\nu = \sum_{\mu=p+1}^{n} \omega_\mu \wedge \alpha_{\mu\nu};$$

即，$d\omega_\nu$ 属于由 $\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$ 所生成的理想.

证明 我们注意，在基的变换下条件 (2.11.12) 是不变的. 换句话说，若 $\{\omega'_\nu\}$ 是生成同一个 $\mathfrak{D}$ 的另外 $n-p$ 个 1-形式的集合，则存在 C^r 函数 $a_{\mu\nu}$，使得

$$\omega'_\nu = \sum_\mu a_{\mu\nu} \omega_\mu.$$

由此即得，若 (2.11.12) 成立，则 $d\omega'_\nu$ 属于由 $\omega'_{p+1}, \cdots, \omega'_n$ 所生成

的理想。

若 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的，而 (U, φ) 是一个如定义 2.11.3 中所述的坐标系，则切空间 $T_a(U_c)(a \in U_c)$ 是正交于 $(dx_{p+1})_a, \cdots, (dx_n)_a$ 的空间. 因而 $\mathfrak{D}|U$ 由 1-形式 $dx_{p+1}, \cdots, dx_n$ 所定义. 这些形式是闭的，因而对于它们，条件(2.11.12)是平凡的.

反之，假设(2.11.12)成立. 令 $X_1, \cdots, X_p$ 是在 a 的一个邻域中生成 $\mathfrak{D}$ 的向量场. 则，由命题 2.6.6，我们有

$$(d\omega_\nu)(X_\kappa, X_\mu) = X_\kappa\omega_\nu(X_\mu) - X_\mu\omega_\nu(X_\kappa) - \omega_\nu([X_\kappa, X_\mu]).$$

然而，由假设，

$$\omega_\nu(X_\mu) = \omega_\nu(X_\kappa) = 0,$$

并且，由(2.11.12)，

$$(d\omega_\nu)(X_\kappa, X_\mu) = 0,$$

因而

$$\omega_\nu([X_\kappa, X_\mu]) = 0, \quad \nu = p+1, \cdots, n,$$

所以对于 $b \in U$, $[X_\kappa, X_\mu](b) \in \mathfrak{D}(b)$. 因此 $\mathfrak{D}$ 是对合的，这样，由定理 2.11.9，$\mathfrak{D}$ 是完全可积的.

下面一个定理断言了完全可积微分组的最大积分的存在性.

2.11.13 定理 令 $\mathfrak{D}$ 是 V 上一个 p 秩的完全可积 C^r 微分组. 则对于任何 $a \in V$，存在 V 的一个 p 维的连通的积分 C^r 子流形 (W, i)，$a \in i(W)$，使得对于 V 的任何连通的积分 C^r 子流形 $j: W' \to V$，$a \in j(W')$，存在一个 C^r 映射 $\eta: W' \to W$，它使 W' 成为 W 的一个 C^r 子流形，并使得 $j = i \circ \eta$.

证明 令 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的闭单位区间. 一链 C^r 映射 $\gamma_\nu: I \to V$，$0 \leqslant \nu \leqslant N$，它们满足 $\gamma_0(0) = a$，$\gamma_N(1) = x$，$\gamma_{\nu+1}(0) = \gamma_\nu(1)$，$0 \leqslant \nu < N$，称为从 a 到 x 的一个积分链，如果每个 γ_ν 是 $\mathfrak{D}$ 的一个积分（定义 2.11.2）. 令 W 是这样的 $x \in V$ 的集合：使得存在一个从 a 到 x 的积分链. 令 $x_0 \in W$，并令 (U, φ) 是一个坐标系，$x_0 \in U$，使得若 $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$，则集合

$$U_c = \{x \in U \mid x_j = c_j, \ p < j \leqslant n\}$$

是 $\mathfrak{D}$ 的积分. 我们假设 $\varphi(U)$ 是一个立方体，因而 U_c 是连通的，

并假设 $\varphi(x_0)=0$. 显然, $U_0\subset W$[1]. 我们要求这样得到的这些集合 U_0 在W中构成 x_0 的一个基本邻域系,这样,我们就将W拓扑化了. 显然,W是 Hausdorff 的,并且内射映射 $i:W\to V$ 是连续的. 若 U, φ, U_0 如上所述,且若 π_1 表示从 R^n 到 R^p 上的投影映射,即 $\pi_1(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_p)$[2], 则 $\varphi_0=\pi_1\circ\varphi|U_0$ 是一个从 U_0 到 R^p 中一个开集上的同胚. 族 $\{(U_0,\varphi_0)\}$ 在W上定义了一个 C^r 流形结构, 而内射映射 $i:W\to V$ 使 W 成为V的一个子空间. 显然, $i:W\to V$ 是 $\mathfrak{D}$ 的一个积分子流形.

现在令 $j:W'\to V$ 是任意一个连通的 C^r 积分子流形, $a'\in W'$, 使得 $j(a')=a$. 令 $w'\in W'$, 并令 $\gamma'_0,\cdots,\gamma'_N$ 是一链 C^r 映射, $\gamma'_\nu:I\to W'$, 满足 $\gamma'_0(0)=a'$, $\gamma'_N(1)=w'$, $\gamma'_{\nu+1}(0)=\gamma'_\nu(1)$, $0\leqslant\nu<N$. 令 $\gamma_\nu=j\circ\gamma'_\nu$. 则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_N$ 构成一个从 a 到 $j(w')$的积分链, 因而 $j(w')\in W$. 我们令 $\eta(w')=j(w')$. 这定义了一个映射 $\eta:W'\to W$. 显然 $i\circ\eta=j$. 从命题 2.11.4 即得 η 是连续的. 因而, 由命题 2.5.12, η 是一个 C^r 映射. 对于 $w'\in W'$, 因为我们有

$$j_{*,w'}=i_{*,\eta(w')}\circ\eta_{*,w'},$$

并且 $j_{*,w'}$ 是内射的, 因而 $\eta_{*,w'}$ 也是内射的, 以致 η 使 W' 成为W的一个 C^r 子流形.

现在我们来给出 Frobenius 定理的第三个形式, 在这个形式中, 它是作为常微分方程的存在性定理(§1.8)的直接推广而出现的.

2.11.14 Frobenius 定理 第三个形式. 令 Ω是 R^n 中的一个开集, Ω' 是 R^m 中的一个开集. 我们用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示 R^n 的一个点, 用 $t=(t_1,\cdots,t_m)$ 表示 R^m 的一个点. 令 $f_\nu:\Omega\times\Omega'\to R^n$ 是 C^k 映射, $k\geqslant 2$, $\nu=1,\cdots,m$. 为了对于每个 $t_0\in\Omega'$ 和 $x_0\in\Omega$, 存在 t_0 的一个邻域U和一个唯一的 C^k 映射 $x:U\to\Omega$, 使得

---

1) $U_0=\{x\in U\,|\,x_j=0,\ p<j\leqslant n\}$. ——译者注

2) 原文将 $\pi_1(x_1,\cdots,x_n)$ 误为 $\pi_i(x_1,\cdots,x_n)$. ——译者注

2.11.15 $x(t_0) = x_0$, $\dfrac{\partial x(t)}{\partial t_\nu} = f_\nu(x(t), t)$, $t \in U$, $\nu = 1, \cdots, m$,

这是必要的和充分的，即，对于 $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$, $(x, t) \in \Omega \times \Omega'$，有

2.11.16 $$\frac{\partial f_\nu}{\partial t_\mu}(x, t) + (d_1 f_\nu)(x, t) f_\mu(x, t)$$
$$= \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\nu}(x, t) + (d_1 f_\mu)(x, t) f_\nu(x, t).$$

[$(d_1 f_\nu)(a, b)$ 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到其自身中的线性变换，它由 $(d_1 f_\nu)(a, b) = (dg)(a)$ 所定义，其中 $g: \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ 是映射 $x \mapsto f_\nu(x, b)$；参阅定义 1.3.4.]。

证明 如果解存在的话，则其唯一性从常微分方程的相应的唯一性论断(定理 1.8.4) 即得。

如果(2.11.15)总是有解，则 (2.11.16) 成立，因为在点 (x_0, t_0) 处，(2.11.16)的两端都等于

$$\left.\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t_\mu \partial t_\nu}\right|_{t=t_0}.$$

为了证明其逆，我们如下进行. (2.11.15)可以写为

2.11.17 $\dfrac{\partial x_\kappa}{\partial t_\nu} = f_{\nu\kappa}(x, t)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f_\nu = (f_{\nu 1}, \cdots, f_{\nu n})$,

$$\kappa = 1, \cdots, n, \ \nu = 1, \cdots, m.$$

考虑 $\Omega \times \Omega'$ 上的微分形式

2.11.18 $$dx_\kappa - \sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu\kappa}(x, t) dt_\nu, \ \kappa = 1, \cdots, n,$$

并令 $\mathfrak{D}$ 是由这些微分形式所定义的 m 秩微分组. 显然，如果 $\mathfrak{D}$ 有一个形如

$$x - \xi(t) = 0, \ \xi(t_0) = x_0$$

的积分流形，其中 ξ 是 t_0 在 Ω' 中的一个邻域中的 C^k 映射[1]，则 $x = \xi$ 是(2.11.15)的一个解.

1) 原文将 Ω' 误为 Ω. ——译者注

如果 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的，则在 (x_0, t_0) 的一个邻域中存在 $\Omega \times \Omega'$ 的一个 m 维的 C^r 子流形，它是 $\mathfrak{D}$ 的一个积分，记为 W. 然后，在 (x_0, t_0) 的一个邻域中我们可以找到 C^r 函数 $u_1, \cdots, u_n$, 使得在 (x_0, t_0) 的附近

$$W = \{(x, t) | u_1(x, t) = \cdots = u_n(x, t) = 0\},$$

$du_\mu(x_0, t_0)$ $(\mu = 1, \cdots, n)$ 是线性无关的. 显然，$du_\mu(x_0, t_0)$ $(\mu = 1, \cdots, n)$ 和微分形式组 (2.11.18) 生成 $T^*_{(x_0, t_0)}(\Omega \times \Omega')$ 的同一个子空间. 这蕴涵着余向量 $(d_1u_1)(x_0, t_0), \cdots, (d_tu_n)(x_0, t_0)$ 是线性无关的. 因而，从隐函数定理 1.3.5 和推论 1.3.9 即得，在 (x_0, t_0) 的邻域中，W 由 $x - \xi(t) = 0$ 型的方程组所定义；正如已经说明了的那样，这蕴涵着，若 $\mathfrak{D}$ 是完全可积的，则方程组 (2.11.15) 是可解的.

然而，我们已经知道 $\mathfrak{D}$ 由诸向量场

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial t_\nu} + \sum_{\kappa=1}^{n} f_{\nu\kappa}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\kappa}, \ \nu = 1, \cdots, m$$

所生成(参阅定理 2.11.11 之前的讨论). 因而，如在命题 2.11.7 的证明中一样，$\mathfrak{D}$ 是完全可积的，当且仅当

$$[X_\nu, X_\mu] = 0, \ \nu, \mu = 1, \cdots, m.$$

但是这恰好是条件(2.11.16). 这就证明了定理.

2.11.19 注 当诸 f_ν 是 C^1 映射时此定理仍成立. 这可以利用注 2.11.10 来证明.

如果在上面的定理中我们取 $n = 1$, 并且诸函数 f_ν 不依赖于 x, 我们就得到下面的结果.

为了在 $t = t_0$ 的一个邻域中存在 C^k 函数 $x(t_1, \cdots, t_m)$, 使得

$$\frac{\partial x}{\partial t_\nu} = f_\nu(t), \ \nu = 1, \cdots, m,$$

这是必要的和充分的，即 $\partial f_\nu/\partial t_\mu = \partial f_\mu/\partial t_\nu$. 这可以简洁地叙述如下：令

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(t) dt_\nu,$$

则，在 Ω' 的任意一点的邻域中存在一个函数 f，使得 $df = \omega$，当且仅当 $d\omega = 0$.

这是将要在 §2.13 中证明的 Poincaré 引理的一个特殊情形.

定理 2.11.9 型的 Frobenius 定理的一个不同的处理可在 Chevalley [1944] 中找到.

2.11.20 注 对于复流形上的全纯向量场等等对象，本节的所有结果都有其类似的命题. 我们用 $\mathfrak{D}$ 由一些全纯向量场所局部地生成这样的条件来定义全纯可微组 $\mathfrak{D}$. 借助于复坐标，与定义 2.11.3 中一样地定义完全可积组. 对于全纯的系统，定理 2.11.8，9，11，13，14 都有其类似的命题. 自然，在(2.11.12)中，要求诸 $\alpha_{\mu\nu}$ 是全纯 1-形式.

§2.12. 殆复流形

我们曾看到(注 2.4.6)，一个复流形 V 在一个点 $a \in V$ 处的切空间 $T_a(V)$ 具有一个自然的复向量空间结构. 有时只考虑这个结构是有益的. 这导致一个更一般的流形类.

令 V 是一个 $n = 2m$ 维(维数是偶的) C^∞ 流形. 我们假设，对于每个 $a \in V$，在 $T_a(V)$ 上给出一个 $\boldsymbol{C}$ 向量空间 (m 维的) 结构. 我们说这个结构可微地依赖于 a，如果满足下述条件：任何 $a \in V$ 有一个邻域 U，在 U 中存在 m 个复值 C^∞ 微分 1-形式 (注 2.1.12) $\omega_1, \cdots, \omega_m$，使得由

$$X \longmapsto (\omega_1(x)(X), \cdots, \omega_m(x)(X))$$

所给出的映射

$$T_x(V) \to \boldsymbol{C}^m, \ x \in U$$

是一个 $\boldsymbol{C}$ 同构(关于 $T_x(V)$ 上给定的那个复结构).

2.12.1 定义 V 上的一个殆复结构是在每个 $T_a(V)$ 上的一个复

结构，它可微地依赖于 a.

要求其存在的诸形式 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 称为结构形式. 一般地，这些形式不是闭的.

对于 $a\in V$，我们用 J_a 表示由 $X \longmapsto \sqrt{-1}X$（关于 $T_a(V)$ 上给定的 $\boldsymbol{C}$ 向量空间结构的乘法）所给出的从 $T_a(V)$ 到其自身中的 $\boldsymbol{R}$ 线性映射；对于一个向量场 X，我们用

$$(JX)(a) = J_a X(a)$$

定义向量场 JX. 因为 $T_a(V)$ 上的映射 J_a 唯一地确定了 $T_a(V)$ 上 $\boldsymbol{C}$ 向量空间结构，因此我们还用 (V, J) 表示此殆复流形. 自然，

$$J_a^2 = -\mathrm{id}_{T_a(V)}.$$

现在我们可以把注 2.4.10 中的考虑应用于 $E = T_a(V)$. 我们有 $\mathscr{E}^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(E, \boldsymbol{C})$, $\mathscr{E}^*_{p,q}$, $\cdots$ 这些空间. 特别，

$$\mathscr{E}^*_{1,0} = \{\omega\in \mathscr{E}^* | \omega(JX) = i\omega(X) \text{ 对于所有 } X\in T_a(V)\}.$$

若 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 是结构形式的一个集合，则 $\omega_1(a), \cdots, \omega_m(a)$ 在 $\mathscr{E}^*_{1,0}$ 中，并且构成 $\mathscr{E}^*_{1,0}$ 的一个 $\boldsymbol{C}$ 基. 因而余向量组

$$\omega_{j_1}(a)\wedge\cdots\wedge\omega_{j_p}(a)\wedge\bar\omega_{k_1}(a)\wedge\cdots\wedge\bar\omega_{k_q}(a),$$
$$1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant m,\quad 1\leqslant k_1<\cdots<k_q\leqslant m$$

给出 $\mathscr{E}^*_{p,q}$ 的一个基. 如在复流形的情形中一样，我们可以论及 (p, q) 型的微分形式（定义 2.4.11）. 在一个复流形上，若 ω 是一个 (p, q) 型的形式，则 $d\omega$ 是两个形式之和，这两个形式的型分别为 $(p+1, q)$, $(p, q+1)$. 一般说来，现在不再是这个情形了. 若 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 是一组结构形式，则 $d\omega_\nu$ 是一个 2-形式，因而

2.12.2 $$d\omega_\nu = \eta_\nu + \eta_\nu' + \eta_\nu'',$$

其中 η_ν 是(2,0)型的，η_ν' 是(1,1)型的，η_ν'' 是(0, 2)型的. 因此我们立刻得到：

2.12.3 推论 若 ω 是一个 (p, q) 型的形式，则 $d\omega$ 是四个形式的和，这些形式的型分别为$(p-1, q+2)$, $(p, q+1)$, $(p+1, q)$, $(p+2, q-1)$. 并且，$(p-1, q+2)$, $(p+2, q-1)$ 型分量总是为 0，当且仅当(2.12.2)中(0,2)型的形式 η_ν'' 为 0.

2.12.4 定义 流形 V 上的殆复结构称为可积的，若对于任何一组

结构形式 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$, $d\omega_\nu$ 没有 $(0,2)$ 型分量.

现令 η 是一个 2-形式,并令 X, Y 是两个向量场. 令

$$S_\eta(X, Y) = \eta(X, Y) + i\eta(JX, Y) + i\eta(X, JY) - \eta(JX, JY).$$

我们即可验证下述事实:

2.12.5 推论 若 η 是(2,0)型或(1,1)型的,则我们有

$$S_\eta(X, Y) = 0 \text{ 对于所有 } X, Y,$$

同时,若 η 是(0,2)型的,则我们有

$$S_\eta(X, Y) = 2\eta(X, Y).$$

利用命题 2.6.6 关于 1-形式 ω 的公式:

$$(d\omega)(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

以及下述事实: 对于任何结构形式 ω_ν, 我们有

$$\omega_\nu(JX) = i\omega_\nu(X),$$

我们容易得到下述结果:

2.12.6 推论 V 上的一个复结构是可积的,当且仅当对于 V 上任意两个向量场 X, Y, 我们有

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0.$$

2.12.7 注 我们已经看到, 对于 V 上任意的复解析结构, 存在一个连带的殆复结构 (注 2.4.6), 此结构是可积的. 在这种情形下, 局部地存在一组闭的结构形式. 令 J 是向量场的连带的映射. 在 $a \in V$ 处的一个 C^∞ 函数芽 f 是全纯的,当且仅当对于 a 附近的 x, 有 $(df)_x \in \mathscr{E}^*_{1,0}(x)$, 因为这蕴涵着在 a 附近 $\bar{\partial} f = 0$. 因而 f 是全纯的,当且仅当

$$(df)_x(J_x X) = i(df)_x(X), \quad X \in T_x(V),$$

即,当且仅当

2.12.8 $$(J_x X)(f) = iX(f), \quad X \in T_x(V).$$

现令 V, V' 是复结构, (V, J), (V', J') 是连带的殆复流形. 假设 $f: V \to V'$ 是一个 C^∞ 映射,使得

$$f_{*,a} \circ J_a = J'_{f(a)} \circ f_{*,a} \text{ 对于所有的 } a \in V.$$

则 f 是全纯的. 事实上,我们只需证明, 若 g 是在 $f(a)$ 处的一个

全纯函数芽，则 $g\circ f$ 在 a 处是全纯的. 但是，若 $X\in T_a(V)$，则我们有

$$\begin{aligned}(J_aX)(g\circ f) &= f_{*,a}(J_aX)(g) = (J'_{f(a)}f_{*,a}(X))\cdot(g)\\ &= if_{*,a}(X)(g), \text{因为 } g \text{ 是全纯的}\\ &= iX(g\circ f).\end{aligned}$$

特别，我们得到：

2.12.9 命题 构成一个殆复结构的基础的复结构是唯一确定的.

Newlander 和 Nirenberg [1957] 的一个重要定理断言，任何一个可积的殆复结构由一个复结构所诱导，稍后一些，Kohn[1963] 和 Hörmander [1964] 给出了它的证明. Malgrange [1969] 得到了这个结果的一个很简单的证明，它可以被应用到极其一般的情形中. 我们不证明这个结果. 我们仅仅指出，如果数据是实解析的，则可以从关于全纯形式的 Frobenius 定理(参阅注 2.11.20)得到这个结果.

2.12.10 定理 令 V 是一个 $n=2m$ 维的实解析流形. 假设 V 具有一个可积的殆复结构，有这样的性质：在任何一点的邻域中，这个结构有一组实解析的结构形式 $(\omega_1,\cdots,\omega_m)$. 则在 V 上存在一个复流形结构，它是 V 上的实解析结构和殆复结构的基础.

证明 因为此定理是局部的，因此我们不妨假设 V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中 0 的一个开邻域 $(n=2m)$. 我们记为[1)]

$$\omega_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}(x_1,\cdots,x_n)dx_\mu,$$

其中诸 $a_{\nu\mu}$ 是 V 中的复值实解析函数. 由引理 1.1.5，在 $\boldsymbol{C}^n\supset\boldsymbol{R}^n$ 中存在一个开集 U 和 U 中的一组全纯函数，我们仍用 $a_{\nu\mu}$ 表示这些全纯函数，它们从 V 上开拓了 $a_{\nu\mu}$. 此外，正如我们可以假设的那样，如果我们假设 U 是一个多圆柱，则在 U 中存在唯一确定的一组全纯函数 $b_{\nu\mu}$，使得

1) 原文将 $\sum\limits_{\mu=1}^{n}$ 误为 $\sum\limits_{\mu=1}^{m}$. ——译者注

$$b_{\nu\mu}(x) = \overline{a_{\nu\mu}(x)}, \ x \in V = U \cap \boldsymbol{R}^n;$$

事实上，

$$b_{\nu\mu}(z) = \overline{a_{\nu\mu}(\bar{z})}.$$

我们令

$$\eta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\mu}(z_1, \cdots, z_n) dz_\mu, \ \nu = 1, \cdots, m,$$

并用公式

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(z_1, \cdots, z_n) dz_\mu, \ \nu = 1, \cdots, m$$

把 ω_ν 开拓到 U 上. 由假设，$(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 构成 V 上的殆复结构的一组结构形式. 因而

$$\omega_1(0), \cdots, \omega_m(0), \bar{\omega}_1(0) = \eta_1(0), \cdots, \bar{\omega}_m(0) = \eta_m(0)$$

构成 $\mathscr{E}^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(T_0(V), \boldsymbol{C})$ 的一个基. 因而 $\omega_\nu, \eta_\kappa, 1 \leqslant \nu, \kappa \leqslant m$，在 0 处是 $\boldsymbol{C}$ 线性无关的，因此，若 U 充分小，则它们在 U 中是 $\boldsymbol{C}$ 线性无关的. 因而，

$$dz_\mu, \ \mu = 1, \cdots, n$$

在 U 中是 $\omega_\nu, \eta_\kappa (1 \leqslant \nu, \kappa \leqslant m)$ 的具有全纯系数的线性组合. 因而，可以将全纯 2-形式 $d\omega_\nu$ 写成

$$d\omega_\nu = \sum_{r<s} f_{r,s}^{(\nu)} \omega_r \wedge \omega_s + \sum_{r,s} g_{r,s}^{(\nu)} \omega_r \wedge \eta_s$$

$$+ \sum_{r<s} h_{r,s}^{(\nu)} \eta_r \wedge \eta_s,$$

其中，系数都是全纯的. 然而，由假设，在 V 上给出的殆复结构是可积的. 因而 $d\omega_\nu | V$ 没有(0,2)型分量，这意味着

$$h_{r,s}^{(\nu)} | U \cap \boldsymbol{R}^n = 0.$$

因为 $h_{r,s}^{(\nu)}$ 是全纯的，因此它在 U 上等于零，因而 $d\omega_\nu$ 属于由 $\{\omega_\mu\}$ 所生成的理想，系数是全纯 1-形式. 由 Frobenius 定理（参阅注 2.11.20)，存在全纯函数 $F_1, \cdots, F_m$，使得在 0 的一个邻域 U' 中，$dF_1, \cdots, dF_m$ 与 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 生成同一个微分组，并且，对于 $z \in U'$，

$dF_1, \cdots, dF_m$ 与 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 生成 $T_z^*(\boldsymbol{C}^n)$ 的同一个子空间．因而，$(dF_1, \cdots, dF_m)$ 是 $U' \cap \boldsymbol{R}^n$ 上殆复结构的一组结构形式．并且，若 $\xi_\nu = F_\nu | \boldsymbol{R}^n \cap U'$，则显然 $(d\xi_\nu)(0), (d\bar{\xi}_\nu)(0) (\nu = 1, \cdots, m)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 无关的，并构成 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(T_0(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{C})$ 的一个基．因而，映射 $\xi: x \longmapsto (\xi_1(x), \cdots, \xi_m(x))$ 在 0 处有微分，它是一个从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{C}^m$ 上的同构，因此，由逆函数定理(参阅注 1.3.11)，它是从 $\boldsymbol{R}^n$ 中 0 的一个邻域 W 到 $\boldsymbol{C}^m$ 中一个开集 W' 上的一个 C^∞ 微分同胚．显然，ξ 把 W 上的殆复结构转移为 $\boldsymbol{C}^m$ 的复结构在 W' 上所诱导的殆复结构．

此时，定理就是命题 2.12.9 的一个直接推论．我们作最后的注．

2.12.11 注 任何殆复流形 V 具有一个自然的定向；特别，任何复流形是可定向的．

证明 我们选取 V 的一个复盖 $\{U_j\}$，使得在每个 U_j 中，我们有一组结构形式 $(\omega_1^{(j)}, \cdots, \omega_m^{(j)})$，$n = 2m$．我们令

$$\omega^{(j)} = \left(\frac{i}{2}\right)^m \omega_1^{(j)} \wedge \overline{\omega_1^{(j)}} \wedge \cdots \wedge \omega_m^{(j)} \wedge \overline{\omega_m^{(j)}}.$$

这是 U_j 上的一个没有零点的 C^∞ n-形式[1]．注意，如果 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$，$(\omega_1', \cdots, \omega_m')$ 是某个开集上的两组结构形式，则存在复值函数 $a_{\mu\nu}$，$1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$[2]，使得

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} \omega_\mu'.$$

令 $D = \det(a_{\mu\nu})$，则

$$\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \wedge \bar{\omega}_m = |D|^2 \omega_1' \wedge \overline{\omega_1'} \wedge \cdots \wedge \omega_m' \wedge \overline{\omega_m'},$$[3]

并且 $|D|^2 > 0$．因而

$$\omega^{(j)} = f_{jj'} \omega^{(j')} \text{ 在 } U_j \cap U_{j'} \text{ 上，}$$

其中 $f_{jj'} > 0$．由此直接得到我们的结果．

---

1) 原文将 U_j 误为 $\omega^{(j)}$．——译者注

2) 原文将 $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$ 误为 $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n$．——译者注

3) 原文将等式右端误为 $|D|^2 \omega_1' \wedge \omega_1' \wedge \cdots \wedge \omega_m \wedge \bar{\omega}_m$．——译者注

§ 2.13. Poincaré 引理和 Grothendieck 引理

我们曾定义了一个 C^∞ 流形 V 上的闭形式和正合形式 (定义 2.6.9),以及 V 的 de Rham 群 $H^p(V)$. 现在我们首先来证明一个属于 Poincaré 的引理，在这些群的研究中，此引理具有极大的重要性.

2.13.1 Poincaré 引理　令 D 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个凸开集，ω 是 D 上的一个 $p(\geqslant 1)$ 次的 C^k 形式 $(k\geqslant 1)$, 它是闭的,即 $d\omega=0$. 则在 D 上存在一个 $p-1$ 次的 C^k 形式 ω', 使得 $d\omega'=\omega$, 并且，如果 r 是一个 $\geqslant 1$ 的整数[1]，则存在一个 $\boldsymbol{R}$ 线性映射 $A: A^p(D,r)\to A^{p+1}(D,r)$, 使得对于任何 $\omega\in A^p(D,r)$, 我们有

$$A(d\omega)+d(A\omega)=\omega.$$

A 称为一个同伦算子. 上面的结果适用于与 D 微分同胚的流形.

证明　不失一般性，我们不妨假设 $\boldsymbol{R}^n$ 的原点 0 在 D 中. 令 $I=(0,1)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的开单位区间, $h: D\times I\to D$ 是映射 $(t,x)\longmapsto tx$ [2].

令 J 遍及所有整数组 $j_1,\cdots,j_p$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$, 并令 $dx_J=dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p}$, 若 $J=(j_1,\cdots,j_p)$. D 上任意一个 C^k 类的 p-形式 ω 可以唯一地写为

$$\omega=\sum_J a_J(x)dx_J,\quad a_J\in C^k(D).$$

因而 $h^*(\omega)=\omega_1+dt\wedge\omega_0$, 其中 ω_1 是一个 p-形式，ω_0 是一个 $(p-1)$-形式,它们都不包含 dt, 即,它们有下述形式

$$\omega_1=\sum_J b_J(t,x)dx_J,\ J=(j_1,\cdots,j_p),\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n,$$

$$\omega_0=\sum_K c_K(t,x)dx_K,\ K=(k_1,\cdots,k_{p-1}),\ 1\leqslant k_1<\cdots<k_{p-1}\leqslant n.$$

---

1) 原文将 r 误为 p.——译者注

2) 原文将 $h: D\times I\to D$ 误为 $h: D\times I$. ——译者注

我们用

$$A(\omega)=\int_0^1 \omega_0 dt=\sum_K\left(\int_0^1 c_K(t,x)dt\right)dx_K$$

定义D上一个C^k类的$(p-1)$-形式$A(\omega)$. 显然,A是$\boldsymbol{R}$线性的. 现在考虑$A(d\omega)$. 我们有

$$h^*(d\omega)=dh^*(\omega)=d\omega_1-dt\wedge\omega_0=d'\omega_1$$
$$+dt\wedge\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}-d'\omega_0\right),$$

其中,对于$D\times I$上的一个不包含dt的p-形式χ,我们定义$d'\chi$为$D\times I$上的一个$(p+1)$-形式,它不包含dt,使得

$$d\chi=d'\chi+dt\wedge\frac{\partial\chi}{\partial t},\quad \frac{\partial\chi}{\partial t}=\Sigma\frac{\partial a_J(x,t)}{\partial t}dx_J,$$
$$\chi=\Sigma a_J(x,t)dx_J.$$

因而

$$A(d\omega)=\int_0^1\frac{\partial\omega_1}{\partial t}dt-\int_0^1(d'\omega_0)dt.$$

显然,

$$\int_0^1\frac{\partial\omega_1}{\partial t}dt=\omega,$$

并且

$$\int_0^1 d'\omega_0 dt=d\int_0^1\omega_0 dt=dA(\omega).$$

这就给出了

2.13.2 $$\omega=dA(\omega)+A(d\omega).$$

特别,如果ω是闭的,则$A(d\omega)=0$,因而$\omega=d\omega'$,其中$\omega'=A(\omega)$.

对于算子$\bar\partial$有一个相应的结果,它首先由 Grothendieck 所证明(未发表). 然而,我们必须考虑一个不同的区域类. 我们从下述引理开始.

2.13.3 引理 令K, L, L'分别是$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{R}^m$中的紧集. 我们用(z,w,t)表示$S=K\times L\times L'$中的一个点. 令g是S的一

个邻域中的一个 C^∞ 函数，对于固定的 z, t, 它是 w 的全纯函数．则在 S 的一个邻域中存在一个 C^∞ 函数 f, 对于固定的 z, t, 它是 w 的全纯函数,使得在 S 的一个邻域中 $\partial f/\partial\bar{z}=g$.

证明 我们不妨假设,对固定的 w, t, g 在 $\boldsymbol{C}$ 中有紧支集;事实上，我们只需在 g 上乘以一个具有紧支集的 C^∞ 函数[1]，它的支集包含在 K 的一个邻域中,在 K 的一个比较小的邻域中它等于 1.

令 ζ 表示 $\boldsymbol{C}$ 中的任意一点，$\zeta=\xi+i\eta$, ξ, η 是实的．定义

$$f(z,w,t)=-\pi^{-1}\int_{\boldsymbol{C}}(\zeta-z)^{-1}g(\zeta,w,t)d\xi\wedge d\eta.$$

因为在 $\boldsymbol{C}$ 中 0 的一个邻域中函数 $1/\zeta$ 是可积的,因而上式等于

$$-\pi^{-1}\int_{\boldsymbol{C}}\zeta^{-1}g(z+\zeta,w,t)d\xi\wedge d\eta,$$

因此它是一个 C^∞ 函数,对于固定的 z, t, 关于 w 它是全纯的．此外,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z,w,t)&=-\pi^{-1}\int_{\boldsymbol{C}}\zeta^{-1}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}(z+\zeta,w,t)d\xi\wedge d\eta\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|\geqslant\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}}(z+\zeta,w,t)\zeta^{-1}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\\&=\lim_{\varepsilon\to0}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|\geqslant\varepsilon}d(g(\zeta+z,w,t)\zeta^{-1}d\zeta).\end{aligned}$$

然而,由 Stokes 定理 2.9.9，这等于

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\varepsilon}g(\zeta+z,w,t)\zeta^{-1}d\zeta=g(z,w,t)^{2)}.$$

这就得到了结论.

我们将利用下述记号． 若 ω 是 $\boldsymbol{C}^n$ 的开集 Ω 中的一个 (p,q) 型的 C^∞ 形式,则我们可以把 ω 唯一地写成下述形式:

$$\omega=\sum_{J,K}a_{JK}dz_J\wedge d\bar{z}_K,\quad a_{JK}\in C^\infty(\Omega),$$
$$J=(j_1,\cdots,j_p),\ K=(k_1,\cdots,k_q),$$

---

1) 此函数只是 z 的函数,与 w, t 无关．——译者注

2) 原文将 $g(z,w,t)$ 误为 $g(z)$. ——译者注

$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n, \quad 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_q \leqslant n.$$

我们称 a_{JK} 为 ω 的系数．我们令

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_\nu} = \sum_{J,K} \frac{\partial a_{JK}}{\partial \bar{z}_\nu} dz_J \wedge d\bar{z}_K,$$

并类似地定义 $\partial\omega/\partial z_\nu$．这样，我们即有

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{\nu=1}^{n} d\bar{z}_\nu \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_\nu}.$$

2.13.4 Grothendieck 引理　令 $K_1, \cdots, K_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中的紧集[1]，并令 $S = K_1 \times \cdots \times K_n \subset \boldsymbol{C}^n$．令 ω 是 S 的一个邻域中的一个 (p, q) 型的 C^∞ 形式 $(q \geqslant 1)$，使得 $\bar{\partial}\omega = 0$，则在 $\boldsymbol{C}^n$ 中存在一个 $(p, q-1)$ 型的形式 ω'，使得在 S 的一个邻域中 $\bar{\partial}\omega' = \omega$．

证明　若 ν 是一个 $\geqslant 1$ 的整数，则我们用

$$A_\nu^{p,q} = A_\nu^{p,q}(S)$$

表示定义在 S 的一个邻域 $U = U(S)$ 中的 C^∞ 形式 ω 的空间，这些 ω 不包含 $d\bar{z}_\nu, \cdots, d\bar{z}_n$，即，$\omega$ 可以写为下面的形式：

$$\omega = \Sigma a_{JK} \cdot dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad a_{JK} \in C^\infty(U),$$

其中 $J = (j_1, \cdots, j_p)$，$K = (k_1, \cdots, k_q)$，$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n$，$1 \leqslant k_1 < \cdots < k_q \leqslant \nu - 1$．［若 $\nu > n$，则 $A_\nu^{p,q}$ 就是所有 (p, q) 型的形式的空间．］显然，若 $\omega \in A_1^{p,q}$，且 $q \geqslant 1$，则我们有 $\omega \equiv 0$，因而当 $\omega \in A_1^{p,q}$ 时引理 2.13.4 的论断是平凡的．用归纳法，我们假设对于 $A_\nu^{p,q}$（其中 $1 \leqslant \nu \leqslant n$）中的所有形式，结论是对的，并令 $\omega \in A_{\nu+1}^{p,q}$，我们可以写为

$$\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \omega_1 + \omega_2,$$

其中

$$\omega_2 \in A_\nu^{p,q}, \quad \omega_1 \in A_\nu^{p,q-1}.$$

若 $\bar{\partial}\omega = 0$，则我们有[2]

$$-d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\omega_1 + \bar{\partial}\omega_2 = 0.$$

因为 ω_1 和 ω_2 不包含 $d\bar{z}_\nu, \cdots, d\bar{z}_n$，因此这蕴涵着对于 $j \geqslant \nu + 1$，

1) 原文将 $K_1, \cdots, K_n$ 误为 $K_1, \cdots, K_m$．——译者注

2) 原文将 $-d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\omega_1$ 误为 $-d\bar{z}_k \wedge \bar{\partial}\omega_1$．——译者注

有

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{z}_j} = 0,$$

以及 ω_1, ω_2 的系数是 $z_{\nu+1}, \cdots, z_n$ 的全纯函数. 由引理 2.13.3, 在 S 的一个邻域里存在一个 $(p, q-1)$ 型的形式 χ', 它的所有的系数是 $z_{\nu+1}, \cdots, z_n$ 的全纯函数, 使得 $\partial\chi'/\partial\bar{z}_\nu = \omega_1$. 在 χ' 上乘以一个适当的具有紧支集的 C^∞ 函数, 它在 S 的一个邻域上等于 1, 则我们就看到, 存在一个 $\boldsymbol{C}^n$ 上的 C^∞ 形式 χ, 使得在 S 的一个邻域中 χ 的所有系数是 $z_{\nu+1}, \cdots, z_n$ 的全纯函数, 并且, 在 S 的某个邻域中 $\partial\chi/\partial\bar{z}_\nu = \omega_1$. 这蕴涵着

$$\omega - \bar{\partial}\chi \in A_{\nu-1}^{p,q}.$$

由关于 ν 的归纳假设, 存在一个 $\boldsymbol{C}^n$ 上的 $(p, q-1)$ 形式 ϕ, 使得在 S 的一个邻域中 $\omega - \bar{\partial}\chi = \bar{\partial}\phi$. 这就证明了引理.

2.13.5 定理 令 $D_1, \cdots, D_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中的开集, 并令 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$. 令 ω 是 D 上的一个 (p, q) 型的 C^∞ 形式 $(q \geqslant 1)$, 满足 $\bar{\partial}\omega = 0$. 则在 D 上存在一个 $(p, q-1)$ 型的 C^∞ 形式 ω', 使得 $\bar{\partial}\omega' = \omega$.

证明 令 $\{K_{\nu,m}\}$, $m = 1, 2, \cdots$, $\nu = 1, \cdots, n$, 是 D_ν 中的一列紧集, 使得

$$K_{\nu,m} \subset \mathring{K}_{\nu,m+1}, \quad \bigcup_{m \geqslant 0} K_{\nu,m} = D_\nu,$$

并令 $S_m = K_{1,m} \times \cdots \times K_{n,m}$. 我们考虑两个情形.

情形 I. $q \geqslant 2$. 由引理 2.13.4, 对于任何 $m \geqslant 0$, 在 $\boldsymbol{C}^n$ 上存在一个 $(p, q-1)$ 型的形式 ω_m, 使得在 S_m 的一个邻域中 $\bar{\partial}\omega_m = \omega$. 则 $\omega_{m+1} - \omega_m$ 是一个 $(p, q-1)$ 型的形式 $(q-1 \geqslant 1)$, 使得在 S_m 的一个邻域中 $\bar{\partial}(\omega_{m+1} - \omega_m) = 0$. 再一次应用引理 2.13.4, 在 $\boldsymbol{C}^n$ 上存在一个 $(p, q-2)$ 型的形式 χ_m, 使得在 S_m 上 $\bar{\partial}\chi_m = \omega_{m+1} - \omega_m$. 我们定义一个 D 上的 $(p, q-1)$ 型的 C^∞ 形式 ω' 如下:

$$\omega' = \begin{cases} \omega_0 & \text{在 } S_0 \text{ 上}, \\ \omega_m - \bar{\partial}\chi_{m-1} - \cdots - \bar{\partial}\chi_0 & \text{在 } S_m \text{ 上}, \ m > 0; \end{cases}$$

注意

$$(\omega_{m+1}-\bar{\partial}\chi_m-\cdots-\bar{\partial}\chi_0)-(\omega_m-\bar{\partial}\chi_{m-1}-\cdots-\bar{\partial}\chi_0)$$
$$=\omega_{m+1}-\omega_m-\bar{\partial}\chi_m=0 \text{ 在 } S_m \text{ 上},$$

因而 ω' 的定义是有意义的．显然，在 D 上 $\bar{\partial}\omega'=\omega$．

情形 II. $q=1$．现在我们假设紧集序列 $\{K_{\nu,m}\}$ 有下述性质：在 $K_{\nu,m}$ 的一个邻域上的任何全纯函数可用 D_ν 上的全纯函数来逼近，此逼近在 $K_{\nu,m}$ 上是一致的．在 $\boldsymbol{C}$ 的任何一个开集中这样的一个序列 $\{K_{\nu,m}\}$ 的存在是一个经典的定理；从 §3.10 的一些结果也可以得到这个命题．因而从定理 1.7.7 即得，在 $S_m=K_{1,m}\times\cdots\times K_{n,m}$ 的一个邻域中的任何一个全纯函数可以用 D 上的全纯函数来逼近，此逼近在 S_m 上是一致的．

若 $\chi=\Sigma a_{JK}dz_J\wedge d\bar{z}_K$ 是 D 上的一个形式，$S\subset D$，则我们记

$$\|\chi\|_s=\sum_{J,K}\sup_{z\in S}|a_{JK}(z)|.$$

令 ω 是 D 上的一个 $(p,1)$ 形式，使得 $\bar{\partial}\omega=0$．由引理 2.13.4，在 $\boldsymbol{C}^n$ 上存在一个 $(p,0)$ 型的形式 ω_m，使得在 S_m 的一个邻域中 $\bar{\partial}\omega_m=\omega$[1]．则 $\bar{\partial}(\omega_{m+1}-\omega_m)=0$，以致（参阅注 2.6.15）$\omega_{m+1}-\omega_m$ 的所有系数在 S_m 的一个邻域中是全纯的．由上面关于逼近的可能性的说明，在 D 上存在一个全纯的 $(p,0)$ 形式，譬如说 χ_m，使得

$$\|\omega_{m+1}-\omega_m-\chi_m\|_{S_m}<2^{-m},\ m=0,1,2,\cdots.$$

我们令

$$\omega'=\omega_0+\sum_{m=0}^{\infty}(\omega_{m+1}-\omega_m-\chi_m),$$

则 ω' 是 D 上的一个 $(p,0)$ 型的形式．在 S_{m+1} 上，我们有

$$\omega'=\omega_{m+1}-\chi_0-\cdots-\chi_m+\sum_{\mu>m}(\omega_{\mu+1}-\omega_\mu-\chi_\mu).$$

末尾的级数是一个 $(p,0)$ 型的形式，它的所有系数在 S_m 的一个

---

1) 原文将 $\bar{\partial}\omega_m=\omega$ 误为 $\bar{\partial}\omega_n=\omega$．——译者注

邻域中是全纯的，因此，由于 $\chi_0, \cdots, \chi_m$ 是全纯的，在 S_m 上我们即有 $\bar{\partial}\omega' = \bar{\partial}\omega_{m+1} = \omega$。由于对于任意 m 这是成立的，因此就得到了结论。

上面给出的 Grothendieck 引理的证明由 Serre [1954] 关于 Gro hendieck 原来的证明的解释而得来。然而，我们注意到，一个类似的归纳法可以用来证明关于立方体的 Poincaré 引理。事实上，这已由 E. Cartan [1958] 所给出。参阅第 153 页上的注。

§2.14. 应用：Hartogs 延拓定理和 Oka-Weil 定理

本节中我们指出如何将 Poincaré 引理和 Grothendieck 引理应用于复分析。

2.14.1 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个凸开集，φ 是 Ω 上的一个实值 C^2 函数。则存在一个 Ω 上的全纯函数 f，使得 $\mathrm{Re}\, f = \varphi$，当且仅当对于 $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n$，在 Ω 上有 $\partial^2\varphi/\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu = 0$。

证明 若 $\varphi = \mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$，因为我们有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_\nu} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu}} = 0,$$

则 $\partial^2\varphi/\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu = 0$。反之，假设这些方程被满足。这即蕴涵着

$$\bar{\partial}\partial\varphi = 0.$$

然而

$$d\partial\varphi = (\bar{\partial} + \partial)\partial\varphi = \bar{\partial}\partial\varphi = 0$$

(因为 $\partial^2 = 0$)。因而由 Poincaré 引理 2.13.1，存在一个复值 C^1 函数 g，使得 $dg = \partial\varphi$。但是 $\partial\varphi$ 是一个 $(1,0)$ 型的形式，因而 $\partial g = \partial\varphi$，并且 $\bar{\partial}g = 0$，所以 g 是全纯的。此外，

$$d(g + \bar{g}) = \partial\varphi + \overline{\partial\varphi} = d\varphi$$

(因为 φ 是实的)，因而 $g + \bar{g} - \varphi$ 是常数。由此即得结论。

这个命题蕴涵着下述推论。

2.14.2 推论 令 φ 是复流形 V 上的一个实值 C^2 函数. 则局部地 φ 是一个全纯函数的实部，当且仅当 $\bar{\partial}\partial\varphi = 0$.

2.14.3 引理 令

$$P = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_\nu| < R_\nu, \nu = 1, \cdots, n\}$$

是 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆柱，$n \geq 2$. 令 U 是 ∂P 的一个邻域，f 是 U 中的一个全纯函数. 则存在一个 P 中的全纯函数 F 和 ∂P 的一个邻域 V，使得 $F|V \cap P = f|V \cap P$.

证明 令 $\varepsilon > 0$，并令

$$U_1 = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid R_1 - \varepsilon < |z_1| < R_1, \ |z_\nu| < R_\nu, \nu \geq 2\}$$

和

$$U_2 = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid |z_1| < R_1, R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2, \\ |z_\nu| < R_\nu, \nu \geq 3\}.$$

若 ε 充分小，则 $U_1 \cup U_2 \subset U$. 对于在 U_1 上全纯的任何函数 f，在

$$\{(z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid |z_\nu| < R_\nu, \nu = 2, \cdots, n\}$$

中存在全纯函数 $a_p(z') = a_p(z_2, \cdots, z_n)$，使得

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(z') z_1^p, \ z = (z_1, z'),$$

并且，此级数在 U_1 的任何紧子集上一致收敛. 现在选取任何点 $z' = (z_2, \cdots, z_n)$，它满足

$$R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2, \ |z_\nu| < R_\nu, \ \nu \geq 3.$$

若 f 在 U 中是全纯的，则 $f(z, z')$ 在 $|z_1| < R_1$ 中是全纯的. 因而在 $f(z_1, z')$ 的 Laurent 展开式中不存在 z_1 的负幂次的项. 这蕴涵着，若 z' 满足上面的条件，则当 $p < 0$ 时 $a_p(z') = 0$. 由解析开拓原理，当 $p < 0$ 时 $a_p(z') \equiv 0$. 因而

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p \qquad \text{在 } U_1 \cup U_2 \text{ 上}.$$

由 Abel 引理，这个级数在 P 的任何紧子集上一致收敛. 若在 P 上

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p,$$

则在 $U \cap P$ 的包含 $U_1 \cup U_2$ 的那个连通分支中 $F = f$. 显然，这个

连通分支具有 $V\cap P$ 这样的形式，这里 V 是 ∂P 的一个邻域.

2.14.4 引理 令 ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个 $(0,1)$ 型的 C^∞ 微分形式，它有紧支集，$n\geqslant 2$. 若 $\bar\partial\omega=0$，则存在一个具有紧支集的 C^∞ 函数 φ，使得 $\bar\partial\varphi=\omega$.

证明 选取 $R>0$，使得

$$\operatorname{supp}(\omega)\subset P=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n\,|\,|z_\nu|<R\}.$$

由 Grothendieck 引理 2.13.4，存在一个 $\mathbf{C}^n$ 上的 C^∞ 函数 ψ，使得 $\bar\partial\psi=\omega$. 然而，在 ∂P 的一个邻域 U 中 $\bar\partial\psi=\omega=0$，即，$\psi$ 在 ∂P 的一个邻域中是全纯的. 由引理 2.14.3，存在一个 P 中的全纯函数 F，它是 $\psi|U\cap P$ 的开拓(若适当选取 U). 令

$$\varphi(z)=\begin{cases}\psi(z)-F(z) & \text{若 } z\in P,\\ 0 & \text{若 } z\notin P,\end{cases}$$

则 φ 是一个具有紧支集的 C^∞ 函数，并且 $\bar\partial\varphi=\omega$.

现在我们来证明下述属于 Hartogs 的重要定理.

2.14.5 定理 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界开集，使得 $\mathbf{C}^n-D$ 是连通的，$n\geqslant 2$. 令 U 是 ∂D 的一个邻域，f 在 U 中是全纯的. 则存在 ∂D 的一个邻域 V 和 D 上的一个全纯函数 F，使得 $F|V\cap D=f|V\cap D$.

证明 令 α 是一个具有紧支集的 C^∞ 函数，$\operatorname{supp}(\alpha)\subset U$，在 ∂D 的一个邻域中 $\alpha=1$. 在 U 中令 $f'=\alpha f$，在 $D-U$ 中令 $f'=0$，则 $f'\in C^\infty(D)$. 在 D 上令 $\omega=\bar\partial f'$，在 $\mathbf{C}^n-D$ 上令 $\omega=0$. 因为在 ∂D 的一个邻域中 $f'=f$，而 f 是全纯的，所以在 ∂D 的一个邻域中 $\omega=0$；因而 ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个具有紧支集(由于 D 是有界的)的 C^∞ 形式. 由引理 2.14.4，在 $\mathbf{C}^n$ 中存在一个具有紧支集的 C^∞ 函数 φ，使得 $\bar\partial\varphi=\omega$. 显然，$\varphi$ 在任意一个开集——在其上 $\omega=0$——上是全纯的，特别，在 $\mathbf{C}^n-D$ 的一个邻域上是全纯的. 然而，在 $\mathbf{C}^n$ 的一个紧子集 K 之外 $\varphi=0$. 由于 $\mathbf{C}^n-D$ 是连通的，D 是有界的，因而存在一个 $\mathbf{C}^n-D$ 的连通的邻域 W，使得 $W\cap(\mathbf{C}^n-K)\neq\varnothing$. 由解析开拓原理，在 W 上 $\varphi\equiv 0$.

在 D 上令 $F=f'-\varphi$. 因为在 W 上 $\varphi=0$，特别，在 ∂D 的

一个邻域 V——在 V 上 $\alpha\equiv1$——中 $\varphi=0$，因而在 $V\cap D$ 上我们有 $F=f$. 此外，在 D 上 $\bar\partial F=\bar\partial f-\bar\partial\varphi=\omega-\bar\partial\varphi=0$，因而 F 是全纯的.

2.14.6 定义 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集. 我们说 Ω 是 $\bar\partial$-零调的，若对于 Ω 上任何一个 (p,q) 型的 C^∞ 形式 ω: $p\geqslant0$, $q\geqslant1$, $\bar\partial\omega=0$, 存在一个 $(p,q-1)$ 型的 C^∞ 形式 ω', 使得 $\bar\partial\omega'=\omega$.

2.14.7 定理（Oka） 令 $D=\{z\in\mathbf{C}\mid|z|<1\}$ 是 $\mathbf{C}$ 中的单位圆盘. 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集，使得 $\Omega\times D$ 是 $\bar\partial$-零调的. 若 f 在 Ω 上是全纯的，则集合

$$\Omega_f=\{x\in\Omega\mid|f(x)|<1\}$$

也是 $\bar\partial$-零调的. 并且，对于 Ω_f 上任何 (p,q) 型的 C^∞ 形式 ω: $p\geqslant0$, $q\geqslant0$, $\bar\partial\omega=0$, 存在一个 $\Omega\times D$ 上 (p,q) 型的 C^∞ 形式 ω', 满足 $\bar\partial\omega'=0$, 并使得 $u^*(\omega')=\omega$, 其中 $u:\Omega_f\to\Omega\times D$ 是映射 $x\longmapsto(x,f(x))$.

证明 我们从后半部分的证明开始. 令 ω 是 Ω_f 上一个 (p,q) 型的 C^∞ 形式，$p,q\geqslant0$，使得 $\bar\partial\omega=0$. 显然，u 是一个全纯的，常态的，内射的映射，使得在每一点处 u_* 是内射的. 因而 $V=u(\Omega_f)$ 是 $\Omega\times D$ 的一个闭的复子流形.

令 $\pi:\Omega\times D\to\Omega$ 是投影映射 $(x,z)\longmapsto x$，并令 $U=\pi^{-1}(\Omega_f)=\Omega_f\times D$. 显然，$U$ 是 $\Omega\times D$ 中 V 的一个邻域.

令 U' 是 $\Omega\times D$ 中 V 的一个邻域，满足 $\overline{U'}\subset U$. 令 α 是 $\Omega\times D$ 上的一个 C^∞ 函数，使得

$$\alpha(x,z)=\begin{cases}0 & \text{若 }(x,z)\notin U',\\ 1 & \text{若 }(x,z)\text{ 属于 }V\text{ 的一个邻域.}\end{cases}$$

形式 $\omega_0=\pi^*(\omega)$ 是 U 上一个 (p,q) 型的形式. 并且，因为在 Ω_f 上 $\pi\circ u=$ 恒等映射，所以 $u^*(\omega_0)=(\pi\circ u)^*(\omega)=\omega$.

定义 $\Omega\times D$ 上的一个形式 ω_1 如下：

$$\omega_1=\begin{cases}\alpha\omega_0 & \text{在 }U\text{ 上,}\\ 0 & \text{在 }U\text{ 外,}\end{cases}$$

则 ω_1 是 $\Omega\times D$ 上的一个 (p,q) 型的 C^∞ 形式，并且 $u^*(\omega_1)=\omega$,

令

$$\omega_2(x,z)=\begin{cases}0 & 若\ (x,z)\in V,\\ (z-f(x))^{-1}(\bar\partial\omega_1)(x,z) & 若\ (x,z)\in\Omega\times D-V,\end{cases}$$

则 ω_2 是 $\Omega\times D$ 上的一个 $(p,q+1)$ 型的 C^∞ 形式，并且 $\bar\partial\omega_2=0$（ω_2 是 C^∞ 的，因为在 V 的一个邻域中 $\bar\partial\omega_1=0$）．因为 $\Omega\times D$ 是 $\bar\partial$-零调的，因而存在 $\Omega\times D$ 上的一个 (p,q) 型的形式 ω_3，使得 $\bar\partial\omega_3=\omega_2$.

令

$$\omega'=\omega_1+(z-f(x))\omega_3,$$

则 ω' 是 $\Omega\times D$ 上的一个 (p,q) 型的 C^∞ 形式．再者，

$$\bar\partial\omega'=\bar\partial\omega_1+(z-f(x))\omega_2=0,$$

并且 $u^*(\omega')=u^*(\omega_1)$（因为当 $(x,z)\in V$ 时 $z-f(x)=0$），因而 $u^*(\omega')=\omega$.

Ω_f 是 $\bar\partial$-零调的这一事实从上面的结果和 $\Omega\times D$ 是 $\bar\partial$-零调的这一事实即得.

2.14.8 推论 记号如定理 2.14.7 中所述．若对于每个 $k\geqslant 0$，$\Omega\times D^k$ 是 $\bar\partial$-零调的，则对于每个 $k\geqslant 0$，$\Omega_f\times D^k$ 也是 $\bar\partial$-零调的.

证明 这从

$$\Omega_f\times D^k=\Omega'_g$$

即得，其中 $\Omega'=\Omega\times D^k$，$g(x,z)=f(x)$.

2.14.9 定理（Oka） 令 $f_1,\cdots,f_k$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数，并令

$$U=\{x\in\mathbf{C}^n\mid |f_\nu(x)|<1,\ \nu=1,\cdots,k\}.$$

令 $u:U\to\mathbf{C}^n\times D^k$ 是映射

$$x\longmapsto(x,f_1(x),\cdots,f_k(x)).$$

则，对于 U 上任何全纯函数 g，存在 $\mathbf{C}^n\times D^k$ 上的一个全纯函数 G，使得 $G\circ u=g$.

证明 令

$$\Omega_0=\mathbf{C}^n,\ \Omega_p=\{x\in\Omega_{p-1}\mid |f_p(x)|<1\},\ 1\leqslant p\leqslant k.$$

令

$$u_p: \Omega_{k-p} \times D^p \to \Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$$

是映射

$$(x, z) \mapsto (x, z, f_{k-p}(x)).$$

由定理 2.13.5 和推论 2.14.8，对于 $0 \leqslant r \leqslant k$, $s \geqslant 0$, $\Omega_r \times D^s$ 是 $\bar{\partial}$-零调的. 再者，由定理 2.14.7，对于 $\Omega_{k-p} \times D^p$ 上任何 $\bar{\partial}$-闭的 (p, q) 形式 ω[1]，存在一个 $\Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$ 上的 $\bar{\partial}$-闭的 (p, q)形式 ω'，使得 $u_p^*(\omega') = \omega$. 然而，我们有 $\Omega_k = U$，并且

$$u: U \to \boldsymbol{C}^n \times D^k$$

是映射

$$u = u_{k-1} \circ \cdots \circ u_1 \circ u_0.$$

由此即得，对于U上适合 $\bar{\partial}\omega = 0$ 的任何 (p, q) 型的形式 ω，在 $\Omega_0 \times D^k = \boldsymbol{C}^n \times D^k$ 上存在一个 (p, q) 型的形式 ω'，满足 $\bar{\partial}\omega' = 0$ 和 $u^*(\omega') = \omega$；当 $p = q = 0$ 时，即得到定理 2.14.9.

2.14.10 Oka-Weil **逼近定理** 若 $f_1, \cdots, f_k$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 上的全纯函数，且若

$$U = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid |f_\nu(x)| < 1, \nu = 1, \cdots, k\},$$

则U是一个 Runge 域（参阅定义 1.7.1），即，U上的任何全纯函数可以用 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式逼近[2]，此逼近在U的任何紧子集上是一致的.

证明 令 $u: U \to \boldsymbol{C}^n \times D^k = \Omega$ 是映射 $x \mapsto (x, f_1(x), \cdots, f_k(x))$. 若 g 在U上是全纯的，则由定理 2.14.9，存在一个Ω上的全纯函数 G，使得 $G \circ u = g$. 但是G可以展开为 Taylor 级数

$$G(x, z) = \sum a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} z_1^{\beta_1} \cdots z_k^{\beta_k},$$

在Ω的任何紧子集上此级数是一致收敛的；特别，G是多项式P_N的极限，在Ω的任何紧子集上，P_N一致收敛. 因而，整函数

$$g_N(x) = P_N(x_1, \cdots, x_n, f_1(x), \cdots, f_k(x))$$

---

1) 所谓ω是 $\bar{\partial}$-闭的形式，即指 $\bar{\partial}\omega = 0$.——译者注

2) 原文将 $x_1, \cdots, x_n$ 误为 $z_1, \cdots, z_n$.——译者注

在U的任何紧子集上一致收敛于 $G\circ u = g$. 因为任何一个整函数是多项式的极限,因而定理得证.

2.14.11 命题 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个凸开集是一个 Runge 域.

证明 只需证明 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个有界凸开集 Ω 是一个 Runge 域即可. 令 K 是 Ω 的一个紧子集. 若 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的坐标函数,则对于任何边界点 $a \in \partial\Omega$, 存在一个线性函数

$$l_a(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu + c_0,$$

使得 $l_a(a) = 0$, 并且对于任何 $x \in \Omega$, $\operatorname{Re} l_a(x) < 0$. 由此即得,对于任何 $a \in \partial\Omega$, 存在一个 $\boldsymbol{C}^n$ 上的线性函数 L, 使得

$$\operatorname{Re} L(x) < 0, \quad x \in K, \quad \operatorname{Re} L(a) > 0$$

(用 $L = l_a + \delta$ 代替 l_a, 其中 $\delta > 0$ 充分小). 则对于 a 附近的所有 x, $\operatorname{Re} L(x) > 0$. 因为 $\partial\Omega$ 是紧的,因而存在有限多个线性函数 $L_1, \cdots, L_r$, 使得

$$\max_\nu \operatorname{Re} L_\nu(x) \begin{cases} >0 & \text{若 } x \in \partial\Omega, \\ <0 & \text{若 } x \in K. \end{cases}$$

因而集合

$$U = \{x \in \Omega \mid \operatorname{Re} L_\nu(x) < 0, \nu = 1, \cdots, r\}$$

包含 K, 并且在 Ω 中是相对紧的[1]. 然而集合 $V = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid \operatorname{Re} L_\nu(x) < 0, \nu = 1, \cdots, r\}$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的凸集, 因而是连通的,并且 $V \cap \Omega = U$ 在 Ω 中是相对紧的. 因而 $V = U$. 这样,

$$U = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid |f_\nu(x)| < 1,\ f_\nu = \exp(L_\nu),\ \nu = 1, \cdots, r\}.$$

由定理 2.14.10, U 是一个 Runge 域,因而 U 上的全纯函数可以用多项式逼近,此逼近在 K 上是一致的. 因为 K 是 Ω 中的任意一个紧集,并且 $U \subset \Omega$, 因而命题即得证.

这里所给出的 Hartogs 定理的证明由 Malgrange-Lax 的逼近定理的证明所提示 (参阅 §3.10; 也可参阅 Malgrange [1956]). Oka-Weil 定理的证明实质上是 Oka 原来的证明 [1936] 用微分

---

1) 原文将 Ω 误为 U.——译者注

形式语言的翻译。两者都在 Hormander [1966] 书中给出。

§2.15. 浸入和嵌入：Whitney 定理

我们将只讨论在无穷远处是可数的 C^∞ 流形 $V, V', \cdots$.[1]

2.15.1 定义 令 V, V' 是 C^k 流形，$f: V \to V'$ 是一个 C^k 映射. f 称为在 $a \in V$ 处正则的，如果微分映射 $f_{*,a}: T_a(V) \to T_{f(a)}(V')$ 是内射的. f 称为在一个集合 $S \subset V$ 上正则的，如果它在每一点 $a \in S$ 处是正则的；f 称为正则的，如果它在 V 上是正则的.

一个 C^k 映射 $f: V \to V'$ 称为一个嵌入，如果 f 是一个浸入[2]，并且是内射的. 此外，如果 $f(V)$ 具有由 V' 诱导的拓扑，f 是一个从 V 到 $f(V)$ 上的同胚，则 f 称为是一个局部常态嵌入（参阅命题 2.5.8）. 一个嵌入（浸入）$f: V \to V'$ 称为是一个闭的嵌入（浸入），如果 f 是常态的（参阅定义 2.5.7）. 类似的定义适用于实的和复的解析流形和映射.

现在我们考虑 $V' = \boldsymbol{R}^q$ 这一情形. 令 $C^k(V, q)$ 表示从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的所有 C^k 映射的集合. 我们将这个空间拓扑化如下：令 $\mathfrak{U}$ 是一族坐标系

$$\mathfrak{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathscr{I}},$$

使得 $\{U_i\}$ 构成 V 的一个局部有限覆盖. 我们假设 $U_i \Subset V$. 令 K_i 是 U_i 的一个紧子集，使得 $\cup K_i = V$. 我们考虑一族正实数 $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ 和一族正整数 $\mathrm{m} = \{m_i\}_{i \in \mathscr{I}}$, $m_i \leqslant k$, 它们的指标集合与 $\mathfrak{U}$ 的指标集合都是 $\mathscr{I}$. 对于 U_i 上任意的 C^k 函数 ϕ 和 n 整数组 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_\nu \geqslant 0$, 其中 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$, 我们令

$$D^\alpha \phi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \phi(x),$$

其中，相应于坐标系 (U_i, φ_i) 的向量场 $\partial/\partial x_\nu$ 如 §2.4 中所定义.

---

1) 所谓 V 在无穷远处是可数的，如果 V 是可列个紧集的并集. ——译者注

2) $f: V \to V'$ 称为一个浸入，如果对于任何 $a \in V$, $f_{*,a}$ 是内射的. ——译者注

对于 $f_0\in C^k(V,q)$，令

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathfrak{U},\mathfrak{m},\varepsilon,f_0)$$

是集合

$$\mathscr{B}=\{f\in C^k(V,q)\,|\,|D^\alpha(f-f_0)(x)|<\varepsilon_i$$
$$\text{对于 } x\in K_i,\ |\alpha|\leqslant m_i,\ i\in\mathscr{I}\}.$$

我们要求，对于固定的 $\mathfrak{U}$，当 $\mathfrak{m}$，ε 遍及所有具有上面所述的性质的两类族时，集合族 $\{\mathscr{B}\}$ 构成 f_0 的一个基本邻域组，这样，我们就定义了 $C^k(V,q)$ 上的拓扑．若

$$\mathfrak{B}=\{(V_j,\varphi_j')\}_{j\in J}$$

是另一族如上所述的坐标系，$\varepsilon'=\{\varepsilon_j'\}$，$\mathfrak{m}'=\{m_j\}$ 分别是相应于 $\mathfrak{B}$ 的正实数族和正整数族，则我们立即看到，对于任何集合

$$\mathscr{B}(\mathfrak{B},\mathfrak{m}',\varepsilon',f_0)=\mathscr{B}',$$

存在一个包含在 $\mathscr{B}'$ 中的集合 $\mathscr{B}(\mathfrak{U},\mathfrak{m},\varepsilon,f_0)$，反之亦然．因而 $C^k(V,q)$ 上的拓扑不依赖于族 $\mathfrak{U}$（和紧集族 $\{K_i\}$，$K_i\subset U_i$）的选取．

我们用 $\mathfrak{C}^k(V,q)$ 表示具有上述拓扑的空间 $C^k(V,q)$，或者，当不会发生混乱的时候，我们就用 $\mathfrak{C}^k$ 或 $\mathfrak{C}^k(V)$ 表示它．

注意，只是在 V 是紧的这一情形中，上述拓扑才与“紧集上阶数 $\leqslant k$ 的导数的一致收敛性拓扑”相一致（参阅 § 2.16）．一般地，$\mathfrak{C}^k(V,q)$ 没有可数基，并且不是可度量化的．

容易从定义得到下述命题：

2.15.2 命题 C^k 浸入 $f:V\to\boldsymbol{R}^q$ 的集合在 $\mathfrak{C}^k(V,q)$ 中是开的 $(k\geqslant 1)$．

我们固定一个具有先前所列出的那些性质的覆盖 $\mathfrak{U}=\{(U_i,\varphi_i)\}$．若 L 是 V 中的任一紧集，并且 $f\in C^k(V,q)$，则对于 $0\leqslant r\leqslant k$，我们令

$$\|f\|_{r,L}=\sum_i\sum_{|\alpha|\leqslant r}\sup_{x\in L\cap K_i}|D^\alpha f(x)|.$$

2.15.3 引理 令 K 是 V 中的一个紧集，L 是 K 的一个紧邻域．则对于任何 C^k 嵌入 $f:V\to\boldsymbol{R}^q$，存在一个 $\delta>0$，使得对于所有满

足

$$\|f-g\|_{1,L}<\delta$$

的 $g\in C^k(V,q)$，映射 $g|K$ 是内射的.

证明 令 (U,φ) 是 V 上的一个坐标系，使得 U 是相对紧的，并令 $C\subset U$ 是紧集. 若 $a,b\in U$，我们记

$$d(a,b)=\|\varphi(a)-\varphi(b)\|.$$

则，因为 f 是一个嵌入，存在一个 $\varepsilon>0$，使得

$$|f(a)-f(b)|\geqslant \varepsilon d(a,b),\quad a,b\in C.$$

若 $g\in C^k(V,q)$，且 $\|f-g\|_{1,\bar{U}}$ 充分小，则对于 $h=f-g$，我们有

$$|h(a)-h(b)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon d(a,b),\ 对于\ a,b\in C.$$

由此即得，$g|C$ 是内射的；事实上，对于 $a,b\in C$，$|g(a)-g(b)|\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon d(a,b)$.

因为 K 是紧的，因此我们可以选取坐标系 $(V_1,\varphi_1),\cdots,(V_N,\varphi_N)$，使得 $K\subset\bigcup V_\nu\subset L$. 若 $\|f-g\|_{1,L}$ 充分小，则 $g|V_\nu$ 是内射的. 因而存在 $K\times K$ 的对角线 Δ 的一个邻域 W，使得当 $(a,b)\in W-\Delta$ 时，对于使 $\|f-g\|_{1,L}$ 充分小的任意的 g，有 $g(a)\neq g(b)$.

然而，存在一个 $\theta>0$，使得若 $(a,b)\in K\times K-W$，则 $|f(a)-f(b)|\geqslant\theta$. 因而，若 $\|f-g\|_{0,K}<\frac{1}{2}\theta$，则对于 $(a,b)\in K\times K-W$，有 $|g(a)-g(b)|>0$. 由此即得引理.

2.15.4 命题 若 $k\geqslant 1$，则从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的闭嵌入映射的集合在 $\mathfrak{C}^k(V,q)$ 中是开的.

证明 令 $\{K_m\}$ 是 V 中的一列紧集，使得

$$K_0=\varnothing,\ K_m\subset\mathring{K}_{m+1},\ 并且\ \bigcup K_m=V.$$

令 L_m 是 $K_{m+1}-K_m$ 的闭包. 则

$$L_m\cap L_{m'}=\varnothing^{1)},\ 若\ m'\geqslant m+2,$$

---

1) 原文将 $\varnothing$ 误为 $\varnothing'$.——译者注

并且 $\{L_m\}$ 构成一个局部有限族．若 $f:V\to \boldsymbol{R}^q$ 是一个闭的嵌入映射，则对于集合族 $\{f(L_m)\}(f(L_m)\subset \boldsymbol{R}^q)$，相同的事实也成立．因而存在 $\boldsymbol{R}^q$ 中的开集 U_m，使得 $f(L_m)\subset U_m$，并且当 $m'\geqslant m+2$ 时，$U_m\cap U_{m'}=\varnothing$．我们可以选取 $\delta_m>0$，使得若 $g\in C^k(V,q)$，并且对于所有 $m>0$，有

$$\|f-g\|_{1,L_m}<\delta_m,$$

则 $g(L_m)\subset U_m$，并且 $g|L_m\cup L_{m+1}$ 是内射的（由引理 2.15.3）．我们断言，所有这样的 g 是内射的．事实上，若 $a,b\in V$，$a\neq b$，令 $a\in L_m$，$b\in L_{m'}$（譬如说 $m'\geqslant m$）．若 $m'\geqslant m+2$，则 $g(a)\in U_m$，$g(b)\in U_{m'}$，并且因为 $U_m\cap U_{m'}=\varnothing$，因而 $g(a)\neq g(b)$．若 $m'=m+1$，或者 $m'=m$，则因为 $g|L_m\cup L_{m+1}$ 是内射的，因而 $g(a)\neq g(b)$．从命题 2.15.2 立刻得到，存在 f 的一个邻域 $\mathscr{B}$，使得任何 $g\in\mathscr{B}$ 是一个嵌入映射．显然，若 $f:V\to \boldsymbol{R}^q$ 是常态的，并且对于所有的 $x\in V$，有 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1$，则 g 也是常态的．命题 2.15.4 即得证．

2.15.5 注 如在上面的证明中那样，容易看到，一个局部常态嵌入映射的一个适当的邻域中的任何元素也是一个嵌入映射．没有嵌入映射是局部常态的这一假设，此结论是不对的．此外，即使在紧集上，一个（非正则的）内射映射的一个逼近未必是内射的．

2.15.6 引理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，$f:\Omega\to \boldsymbol{R}^q$ 是一个 C^k 映射，$k\geqslant 1$，$q\geqslant 2n$．令 r 是任一 $\leqslant k$ 的整数．则对于任何 $\varepsilon>0$，存在一个 C^k 映射 $g:\Omega\to \boldsymbol{R}^q$，使得 $\|g-f\|_r^\Omega<\varepsilon$，并使得向量 $\partial g/\partial x_1,\cdots,\partial g/\partial x_n$ 在 Ω 的每个点处是线性无关的．

证明 由定理 1.6.5，我们不妨假设 $k\geqslant 2$．令 $f_0=f$．只需证明，若 f' 是一个 C^k 映射，使得 $\partial f'/\partial x_1,\cdots,\partial f'/\partial x_s$ 在 Ω 的任何点处是线性无关的，则存在 $g\in C^k(\Omega)$，使得 $\|g-f'\|_r^\Omega<\varepsilon$，并使得 $\partial g/\partial x_1,\cdots,\partial g/\partial x_{s+1}$ 在 Ω 的任何点处是线性无关的；这里 $0\leqslant s<n$．令

$$v_j(x)=\frac{\partial f'}{\partial x_j},\ 1\leqslant j\leqslant n;$$

则 v_j 是一个从 Ω 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的 C^{k-1} 映射. 考虑由

$$\varphi(\lambda_1, \cdots, \lambda_s, x) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f'}{\partial x_j} - v_{s+1}(x)$$

所定义的映射

$$\varphi: \boldsymbol{R}^s \times \Omega \to \boldsymbol{R}^q.$$

我们有 $\dim(\boldsymbol{R}^s \times \Omega) = s + n < 2n \leqslant q$, 并且 $\varphi \in C^1$ (因为 $k \geqslant 2$). 因而由引理 1.4.3, 对于任何 $\delta > 0$, 存在一个 $a \in \boldsymbol{R}^q$, $\|a\| < \delta$, 使得 $a \notin \varphi(\boldsymbol{R}^s \times \Omega)$. 如果我们令

$$g(x) = f'(x) + a \cdot x_{s+1},$$

那么,如果 $\partial f'/\partial x_1, \cdots, \partial f'/\partial x_s$ 是 $\boldsymbol{R}$ 无关的,并且 $a \notin \varphi(\boldsymbol{R}^s \times \Omega)$, 则在任何 $x \in \Omega$ 处, $\partial g/\partial x_1, \cdots, \partial g/\partial x_{s+1}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 无关的. 若 δ 充分小,我们就得到了结论.

注意,引理 2.15.6 中的 g 是 Ω 的一个浸入.

2.15.7 Whitney **浸入定理** 若 V 是一个 n 维 C^k 流形,并且 $q \geqslant 2n$, 则从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的 C^k 浸入映射的集合是 $\mathfrak{C}^k(V, q)$ 中的一个开稠集.

证明 令 $\mathfrak{U} = \{(U_\nu, \varphi_\nu)\}_{\nu=1,2,\cdots}$ 是一列坐标系,使得 $\{U_\nu\}$ 是局部有限的, $\varphi_\nu(U_\nu) = \Omega_\nu$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界开集, U_ν 在 V 中是相对紧的,并且 $V = \cup U_\nu$. 令 $K_\nu \subset U_\nu$ 是紧集, $\cup K_\nu = V$, 并令 $\varepsilon_\nu > 0$ 和整数 $n_\nu \geqslant 0$, $n_\nu \leqslant k$ 是给定的. 令 $f \in C^k(V, q)$, 并令 $f_0 = f$. 假设已经构造了 $f_0, \cdots, f_m$, 它们具有下述一些性质:

(a, m) $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon_\nu$ 对于 $x \in K_\nu$, $|\alpha| \leqslant n_\nu$;

(b, m) f_m 在 $\bigcup_{\nu=0}^{m} K_\nu$ 上是正则的;

(c, m) $\mathrm{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$, $p = 0, 1, \cdots, m-1$.

令 α_m 是 V 上的一个 C^k 函数, $\mathrm{supp}(\alpha_m) \subset U_{m+1}$, 并且在 K_{m+1} 的一个邻域中 $\alpha_m = 1$. 由引理 2.15.6, 对于任何 $\delta > 0$ 和任何整数 $0 \leqslant N \leqslant k$, 存在一个 C^k 映射 $h_m: U_{m+1} \to \boldsymbol{R}^p$, 它在 U_{m+1} 上是正则的,并且

$$|D^\alpha(f_m - h_m)| < \delta \text{ 在 } U_{m+1} \text{ 上}, |\alpha| \leqslant N.$$

考虑映射

$$f_{m+1}=\begin{cases}f_m+\alpha_m(h_m-f_m) & 在 U_{m+1} 上,\\ f_m & 在 V-U_{m+1} 上,\end{cases}$$

则 $f_{m+1}\in C^k(V, q)$，并且，当 $\delta\to 0$ 和 $N\to K$ 时，在 $\mathfrak{C}^k(V, q)$ 中 $f_{m+1}\to f_m$。因而，若 δ 充分小，并且 $N\geqslant 1$，则 f_{m+1} 在 $\bigcup_{\nu\leqslant m}K_\nu$ 上是正则的。此外，在 K_{m+1} 上 $f_{m+1}=h_m$，因而 f_{m+1} 在 K_{m+1} 上也是正则的。显然，若 δ 充分小，而 N 充分大，则映射组 $(f_0, \cdots, f_{m+1})$ 满足 $(a, m+1)$，$(b, m+1)$，$(c, m+1)$。由归纳法知，对于所有 $m\geqslant 0$，我们得到了满足 (a, m)，(b, m)，(c, m) 的映射 $f_m: V\to \boldsymbol{R}^q$，$m\geqslant 0$。如果我们定义

$$g=\lim_{m\to\infty} f_m,$$

则我们得到一个正则映射 $g: V\to\boldsymbol{R}^q$，对于 $x\in K_\nu$，它满足 $|D^\alpha f(x)-D^\alpha g(x)|\leqslant\varepsilon_\nu$，$|\alpha|\leqslant n_\nu$。这就证明了定理。

2.15.8 Whitney **嵌入定理** 令 V 是一个 n 维 C^k 流形，并且 $q\geqslant 2n+1$，则从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的嵌入映射的集合在 $\mathfrak{C}^k(V, q)$ 中稠。

证明 令 f 是从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的任一浸入映射。令 $\mathfrak{U}=\{(U_\nu, \varphi_\nu)\}$ 是 V 的一列坐标系，使得 $\{U_\nu\}$ 是 V 的一个局部有限覆盖，$U_\nu\Subset V$，并且 $f|U_\nu$ 是内射的（这样的一个序列是存在的）。令 $\varepsilon_\nu>0$，并令 $n_\nu>0$ 是 $\leqslant k$ 的整数。令 K_ν 是 U_ν 中的紧集，并且 $\bigcup K_\nu=V$。令 $f_0=f$。通过归纳法，我们将构造从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的一组映射 $f_0, \cdots, f_m$，它们满足下面一些性质：

(i, m) 对于所有 ν，$f_m|U_\nu$ 是内射的，$f_m|\bigcup_{\nu\leqslant m}K_\nu$ 是内射的；

(ii, m) 对于 $p=0, 1, \cdots, m-1$，$\operatorname{supp}(f_{p+1}-f_p)\subset U_{p+1}$；

(iii, m) $|D^\alpha f_m(x)-D^\alpha f(x)|<\varepsilon_\nu$ 对于 $x\in K_\nu$ 和 $|\alpha|\leqslant n_\nu$，$\nu\geqslant 1$。

假设给定了 $f_0, \cdots, f_m$。令 α_m 是 V 上的一个具有紧支集的 C^k 函数，$\operatorname{supp}(\alpha_m)\subset U_{m+1}$，并且在 K_{m+1} 的一个邻域中 $\alpha_m=1$。考虑集合

$$\Omega=\{(x, y)\in V\times V\,|\,\alpha_m(x)\neq\alpha_m(y)\};$$

则 Ω 是一个 $2n$ 维的 C^k 流形．令 $\varphi:\Omega \to \boldsymbol{R}^q$ 是映射

$$\varphi(x, y) = -\frac{f_m(x) - f_m(y)}{\alpha_m(x) - \alpha_m(y)}.$$

因为 $q \geqslant 2n+1$，因而 $\varphi(\Omega)$ 有零测度；因而对于任何 $\delta > 0$，存在一个

$$v \in \boldsymbol{R}^q, \ \|v\| < \delta, \ v \notin \varphi(\Omega).$$

令

$$f_{m+1} = f_m + \alpha_m v.$$

我们断言，f_{m+1} 有性质 (i, $m+1$) 和 (ii, $m+1$)；后者是显然的．然而，如果

$$f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y),$$

则我们有

$$f_m(x) - f_m(y) = -v(\alpha_m(x) - \alpha_m(y)),$$

因而，由 $v \notin \varphi(\Omega)$，则我们必定有 $\alpha_m(x) - \alpha_m(y) = 0$，以及 $f_m(x) - f_m(y) = 0$．后一事实蕴涵着对于所有 ν，$f_{m+1}|U_\nu$ 是内射的，并蕴涵着 $f_{m+1}|\bigcup_{\nu\leqslant m}K_\nu$ 是内射的．令 $x \in K_{m+1}$ 和 $y \in \bigcup_{\nu\leqslant m+1}K_\nu$，并假设 $f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y)$，则因为 $\alpha_m(x) = \alpha_m(y)$，即得 $y \in U_{m+1}$（因为 $\alpha_m(x) = 1$（由于 $x \in K_{m+1}$）以及在 $V - U_{m+1}$ 上 $\alpha_m = 0$）．但是由于 $f_m|U_{m+1}$ 是内射的，因此这蕴涵着 $x = y$．

再者，当 $\delta \to 0$ 时在 $\mathfrak{C}^k(V, q)$ 中 $f_{m+1} \to f_m$．因而容易得到对于所有 $m \geqslant 0$ 满足 (i, m)，(ii, m) (iii, m) 的映射 f_m 的存在性．

如果我们令

$$g = \lim_{m\to\infty} f_m,$$

则 g 在 V 上是内射的，并且对于 $|\alpha| \leqslant n_\nu$，在 K_ν 上我们有 $|D^\alpha(f-g)| \leqslant \varepsilon_\nu$．这就证明了，对于任意一个浸入映射，存在一个任意接近于它的从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的 C^k 内射映射．因而，从定理 2.15.7 和命题 2.15.2 即得本定理．

从这些定理以及命题 2.15.4，我们直接得到：

2.15.9　定理　令 V 是一个 n 维 C^k 流形，$k \geqslant 1$．若 $q \geqslant 2n$，则

从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的闭浸入映射的集合是从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中所有常态 C^k 映射组成的开集 $\mathfrak{P}$ 的一个开稠子集. 若 $q \geqslant 2n+1$, 则从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的闭嵌入映射的集合在 $\mathfrak{P}$ 中是开的和稠的.

2.15.10 注 从 V 到 $\boldsymbol{R}^q(q \geqslant 1)$ 中的常态 C^k 映射的集合 $\mathfrak{P}$ 是非空的.

证明 因为存在一个从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^q(q \geqslant 1)$ 中的常态 C^k 映射, 因此我们不妨假设 $q=1$. 令 $\{U_\nu\}$ 是 V 的一列相对紧子集, $\cup U_\nu = V$, 并假设族 $\{U_i\}$ 是局部有限的. 令 K_ν 是 U_ν 的一个紧子集, 使得 $\cup K_\nu = V$. 令 η_ν 是 V 上的一个具有紧支集的 C^k 函数, $\operatorname{supp}(\eta_\nu) \subset U_\nu$, 使得对于所有 x, $0 \leqslant \eta_\nu(x) \leqslant 1$, 对于 $x \in K_\nu$, $\eta_\nu(x) = 1$. 则由

$$\varphi(x) = \sum_{\nu \geqslant 1} \nu \eta_\nu(x)$$

给出的映射

$$\varphi: V \to \boldsymbol{R}$$

是常态的和 C^k 的.

2.15.11 推论 若 V 是一个 n 维 C^k 流形,则存在一个从 V 到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的闭浸入映射和一个从 V 到 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中的闭嵌入映射.

2.15.12 注 关于 Whitney 的嵌入定理和浸入定理, 我们在这里添加一些注记. 首先, 定理中第二个流形限制于 Euclid 空间并不是实质性的. 我们可以证明下面的定理 (例如, 参阅 Cartan [1962]).

令 V 和 V' 是两个 C^k 流形 (具有可数基),并令 V' 是连通的. 假设 $\dim V' \geqslant 2\dim V + 1$. 则存在一个从 V 到 V' 中的闭 C^k 嵌入映射, 除非 V 是非紧的, 并且 V' 是紧的. [在后面的情形中,自然不存在从 V 到 V' 中的常态映射.]

若 V 是一个实解析流形, 并且对于某个 q, 有一个从 V 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的实解析闭嵌入映射, 则从命题 2.5.14 和定理 1.6.5 容易得到, V 上的实解析函数的集合在 $\mathfrak{C}^k(V, 1)$ 中稠. 因而,从上面证明了的 Whitney 的两个定理和命题 2.15.4 得到, 这样的一个流形有一

个到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的实解析闭浸入映射和一个到 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中的实解析闭嵌入映射．这些结果已经由 Grauert [1958] 所完善，他证明了，对于某个 q，任意一个具有可数基的（n 维）实解析流形可以被实解析地嵌入为 $\boldsymbol{R}^q$ 中的一个闭子流形．

关于 C^k 流形，Whitney [1944b] 精确了浸入定理；他证明了，任意一个 n（$\geqslant 2$）维的 C^k 流形在 $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ 中有一个闭 C^k 浸入．[当 $n=1$ 时这显然是不对的；圆不能浸入于直线中．]他还进一步证明了 [1944a]，任意一个 n 维 C^k 流形可以被嵌入到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中；特别，一个 n 维的紧 C^k 流形在 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中有一个闭嵌入．这些结果已经由 Hirsch [1961] 所完善，他证明了，一个 n 维的非紧流形在 $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ 中有一个嵌入，因而在 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中有一个闭嵌入．

特别，把这些注记放在一起，我们可以得到下述定理．

定理． 令 V 是一个 n 维 C^k（实解析）流形．则存在一个从 V 到 $\boldsymbol{R}^{2n-1}$（若 $n\geqslant 2$）中的闭 C^k（实解析）浸入和一个从 V 到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的闭 C^k（实解析）嵌入．

已经得到一些很有意义的结果，对于更特殊的流形类，这些结果证明了较精确的嵌入定理．这些"嵌入和非嵌入"定理已经有一大批文献了．我们将只限于叙述其中的两个定理．进一步的参考资料可在 Atiyah [1962] 和 Haefliger [1961] 中找到．

Wall **定理**（参阅 Wall [1965]）．任意一个三维紧流形可以被嵌入到 $\boldsymbol{R}^5$ 中．

一个流形 V 称为 k-连通的，如果对于任何 m，$0\leqslant m\leqslant k$，和从球面

$$S^m=\{(x_1,\cdots,x_{m+1})\in\boldsymbol{R}^{m+1}\,|\,x_1^2+\cdots+x_{m+1}^2=1\}$$

到 V 中的任何连续映射 f，存在一个从"圆盘"

$$D^{m+1}=\{(x_1,\cdots,x_{m+1})\in\boldsymbol{R}^{m+1}\,|\,x_1^2+\cdots+x_{m+1}^2\leqslant 1\}$$

到 V 中的连续映射 F，使得 $F|S^m=f$．

Haefliger **定理** [1961]：若 V 是一个紧的 k-连通流形，且若 $n\geqslant 2k+3$，则 V 可以被嵌入到 $\boldsymbol{R}^{2n-k}$ 中．

全纯地把复流形嵌入到某个 $\boldsymbol{C}^q$ 中的问题是一类具有完全不

同胚性质的问题. 可以被嵌入为 $\boldsymbol{C}^q$ 的子流形的流形是所谓的 Stein 流形. 对于这些流形，我们有类似于推论 2.15.11 的命题，可参阅 Bishop [1961] 和Narasimhan [1960].

注. 这里所给出的定理 2.15.7,8 的证明基本上与 Whitney [1957] 一致.

§2.16. Thom 的横截性定理

在这一节中我们要证明 Thom [1956] 的一个定理的一个特殊情形. 我们所给出的证明基本上是 Abraham [1963] 的证明. 关于此定理更细致的研究及其某些应用，请参阅 Cartan [1962].

令 V 是一个具有可数基的 n 维 C^k 流形，$1 \leqslant k \leqslant \infty$. 在 V 上的(实值) C^k 函数的空间 $C^k(V)$ 上我们定义一个拓扑如下. 令 K 是 V 的任一紧子集，$X_1, \cdots, X_m (0 \leqslant m \leqslant k,\ m \in \boldsymbol{Z})$ 是 V 上的向量场，$\varepsilon > 0$. 集合

$$\mathscr{B} = \{f \in C^k(V) \mid |X_1 \cdots X_m(f)(x)| < \varepsilon, \text{对于所有 } x \in K\}$$

的族(任何紧集 $K \subset V$，任何向量场 $X_1, \cdots, X_m$，任何 $\varepsilon > 0$) 构成 $0 \in C^k(V)$ 的一个基本邻域组. (这个"在紧集上阶数 $\leqslant k$ 的导数的一致收敛性" 拓扑弱于在 §2.15 中引进的拓扑 $\mathfrak{C}^k$.)令 V' 是一个具有可数基的 m 维 C^k 流形，$C^k(V, V')$ 是从 V 到 V' 中的 C^k 映射的集合. 我们将 $C^k(V, V')$ 拓扑化如下.

C^k 映射 $f_\alpha: V \to V'$ 的一个滤子 $\{f_\alpha\}$ 收敛于一个 C^k 映射 $f: V \to V'$，当且仅当对于 V' 上的每个 C^k 函数 φ，V 上 C^k 函数的滤子 $\{\varphi \circ f_\alpha\}$ 在 $C^k(V)$ 中收敛于 f.

容易验证，$C^k(V, V')$ 是一个具有可数基的完备度量空间.

现在令 V, V' 是两个在无穷远处可数的 C^k 流形[1]，并令(W, i)

---

1) 见第 140 页译者注 1). ——译者注

是 V' 的一个闭子流形．我们把 W 等同于 $i(W)$，并把 $a\in W$ 处的切空间 $T_a(W)$ 等同于 $T_{i(a)}(V')$ 的子空间 $i_{*,a}(T_a(W))$.

2.16.1 定义 一个 C^k 映射 $f:V\to V'$ 称为在一个点 $a\in V$ 处**横截于**W的，如果，或者 $f(a)\notin W$，或者

$$f_{*,a}(T_a(V))+T_{f(a)}(W)=T_{f(a)}(V'),$$

即，$f_{*,a}(T_a(V))$ 和 $T_{f(a)}(W)$ 张成 $T_{f(a)}(V')$．f 称为横截于W的，如果在 V 的每个点处 f 是横截于W的．

在下文中，$\dim V=n$，$\dim V'=m$，$\dim W=m-q$，$q\geqslant 1$，因而W有余维数 q.

2.16.2 命题 若 $f:V\to V'$ 是一个 C^k 映射，$f(a)\in W$，$a\in V$，则 f 在 a 处横截于 W[1]，当且仅当存在 $T_a(V)$ 的一个 q 维子空间 E，使得 $f_{*,a}|E$ 是内射的，并且

$$f_{*,a}(E)\cap T_{f(a)}(W)=\{0\}.$$

证明 如果上面的条件被满足，则因为 $\dim f_{*,a}(E)+\dim T_{f(a)}(W)=\dim T_{f(a)}(V')$，我们即有 $f_{*,a}(E)+T_{f(a)}(W)=T_{f(a)}(V')$，特别，$f$ 在 a 处横截于 W．反之，若 f 在 a 处横截于 W，令 E' 是 $f_{*,a}(T_a(V))$ 的一个 q 维子空间，使得 $E'\cap T_{f(a)}(W)=\{0\}$．则存在 $T_a(V)$ 的一个 q 维子空间 E，使得 $f_{*,a}(E)=E'$，由此即得命题.

2.16.3 命题 若 $f:V\to V'$ 是一个横截于W的 C^k映射，则 $f^{-1}(W)$ 或者是空的，或者是V的一个余维数为 q 的，即，维数为 $n-q$ 的子流形（从 $f^{-1}(W)$ 到 V 中的包含映射使 $f^{-1}(W)$ 成为 V 的一个子流形）.

证明 令 $a\in f^{-1}(W)$，$b=f(a)\in W$．令 E 是 $T_a(V)$ 的一个 q 维子空间，使得 $f_{*,a}|E$ 是内射的，并且 $E'\cap T_b(W)=\{0\}$，其中 $E'=f_{*,a}(E)$．令 $g_1,\cdots,g_q$ 是 V' 上 b 的一个邻域 U' 中的 C^k 函数，使得 $dg_1,\cdots,dg_q$ 是 $\boldsymbol{R}$ 无关的，并且

---

1) 原文遗漏"在 a 处"．——译者注

$$U'\cap W=\{y\in U'|g_1(y)=\cdots=g_q(y)=0\}.$$

因为 $(dg_i)_b|T_b(W)=0$，由此即得 $(dg_1)_b|E',\cdots,(dg_q)_b|E'$ 是 $\mathbf{R}$ 无关的。因为 $f_{*,a}: E\to E'$ 是一个同构，因此 $d(g_1\circ f)_a|E,\cdots,d(g_q\circ f)_a|E$ 是 $\mathbf{R}$ 无关的，特别，$d(g_1\circ f)_a,\cdots,d(g_q\circ f)_a$ 是无关的。因为

$$f^{-1}(W)\cap f^{-1}(U')=\{x\in f^{-1}(U')|g_1\circ f(x)=\cdots=g_q\circ f(x)=0\},$$

因而由推论 2.5.5 即得，$f^{-1}(W)$ 是 V 的一个余维数为 q 的子流形。

2.16.4 引理 令 K 是 V 的一个紧子集，则在 K 的每一点处与 W 横截的从 V 到 V' 中的 C^k 映射的集合在 $C^k(V,V')$ 中是开的。

这容易从定义得到。

现在令 V,V',W 是 C^∞ 流形，并令 K 是 V 的一个紧子集。

2.16.5 命题 在 K 的每一点处与 W 横截的从 V 到 V' 中的 C^∞ 映射的集合在 $C^\infty(V,V')$ 中(甚至在 $\mathfrak{C}^\infty(V,V')$ 中)是稠的。

证明 令 $f:V\to V'$ 是任一 C^∞ 映射。由于引理 2.16.4，只需证明：任何点 $a\in V$ 有一个邻域 U，使得在 U 的每一点处横截于 W 的从 V 到 V' 中的 C^∞ 映射的集合包含 f 于其闭包之中。

令 (U_0,φ_0) 是一个坐标系，使得 $a\in U_0$，$U_0\Subset V$，并令 (U',φ') 是 V' 上的一个坐标系，使得 $f(U_0)$ 在 U' 中是相对紧的。令 U_1 是 U_0 中的一个相对紧集，并令 λ 是 V 上的一个 C^∞ 函数，使得 $\mathrm{supp}(\lambda)\subset U_0$，并且对于 $\overline{U}_1$ 的一个邻域中的 x，有 $\lambda(x)=1$。我们假设 $0\in\varphi'(U')$。如果 $u_1,\cdots,u_p$ 是从 V 到 $\mathbf{R}^m$ 中的 C^∞ 映射[1]，$\xi_1,\cdots,\xi_p$ 是实数，$|\xi_i|<\delta$，则当 δ 充分小时，

$$g(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)=\begin{cases}\lambda(x)(\xi_1u_1(x)+\cdots+\xi_pu_p(x)) & \text{对于 } x\in U_0,\\ 0 & \text{对于 } x\notin U_0\end{cases}$$

定义了一个从 V 到 $\varphi'(U')$ 中的 C^∞ 映射[2]；我们用

$$F_\xi(x)=\begin{cases}\varphi'^{-1}\circ(g(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)+\varphi'\circ f(x)) & \text{对于 } x\in U_0,\\ f(x) & \text{对于 } x\notin U_0\end{cases}$$

---

1),2) 原文将 C^∞ 误为 C^k。——译者注

定义一个映射 $F_\xi: V \to V'$. 对于充分小的 δ, 这个映射在 V 上有意义,并为 C^∞ 的,令 $Q = \{\xi \in \boldsymbol{R}^p \mid |\xi_i| < \delta, i = 1, \cdots, p\}$. 令

$$F(\xi, x) = F_\xi(x),$$

这就给出了一个映射

$$F: Q \times V \to V'.$$

容易验证,若向量组 $u_1(0), \cdots, u_p(0)$ 张成 $\boldsymbol{R}^m$, 则映射

$$F_{*,(0,a)}: T_{(0,a)}(Q \times V) \to T_b(V')$$

是映上的(其中, $b = f(a)$——译者注). 因而,如果 δ 充分小, 并且 U 是 a 的一个充分小的邻域, 则对于所有 $\xi \in Q$ 和 $a' \in U$, 映射

$$F_{*,(\xi,a')}: T_{(\xi,a')}(Q \times V) \to T_{F(\xi,a')}(V')$$

是映上的. 特别,映射 $F: Q \times U \to V'$ 横截于 W[1]. 因而(参阅命题 2.16.3), $F^{-1}(W) = W_0$ 是 $Q \times U$ 的一个余维数为 q 的子流形(注意, $W_0 \neq \varnothing$, 因为 $F(0, a) = b \in W$).

令 π 是从 $Q \times U$ 到 Q 上的投影映射在 W_0 上的限制. 令 A_π 是 π 的临界集(即,使得 $\operatorname{rank}(\pi_{*,(\xi,x)}) < p = \dim Q$ 的点 $(\xi, x) \in W_0$ 的集合).则由 Sard 定理 2.2.13, $\pi(A_\pi)$ 在 Q 中无处稠. 这样,命题 2.16.5 就是下述命题的一个直接的后果.

2.16.6 命题 对于任何 $\xi \notin \pi(A_\pi)$,映射 $F_\xi: V \to V'$ 横截于 W.

证明 令 $x \in V$.若 $(\xi, x) \notin W_0$, 则 $F_\xi(x) \notin W$,以致我们没有什么需要证明的了. 因而我们假设 $(\xi, x) \in W_0$, 则因为 $\xi \notin \pi(A_\pi)$, 因此映射 $\pi_{*,(\xi,x)}: T_{(\xi,x)}(W_0) \to T_\xi(Q)$ 是映上的. 我们把 $T_{(\xi,x)}(Q \times V)$ 等同于 $T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$, 把 $T_{(\xi,x)}(W_0)$ 等同于 $T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$ 的一个子空间 T_0. 则从 T_0 到第一个因子 $T_\xi(Q)$ 上的投影映射是映上的. 因为 F 在 (ξ, x) 处横截于 W, 因而存在(命题 2.16.2) $T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$ 的一个 q 维子空间 E_0, 使得

$$F_{*,(\xi,x)}(E_0) = E'$$

是 $T_{F(\xi,x)}(V')$ 的一个 q 维子空间,并且

$$E' \cap T_{F(\xi,x)}(W) = \{0\}.$$

---

1) 原文将 V' 误为 V.——译者注

我们断言，如果 $\Phi = F_{*,(\xi,x)}$，则我们有 $\Phi^{-1}(T_{F(\xi,x)}(W)) \subset T_{(\xi,x)}(W_0)$。事实上，若 $\Phi(v) \in T_{F(\xi,x)}(W)$，则我们可以写为 $v = w_0 + v_0$，其中 $w_0 \in T_{(\xi,x)}(W_0)$，$v_0 \in E_0$，显然，$\Phi(v_0) \in T_{F(\xi,x)}(W)$。$\Phi(v_0) \in E'$ 也是显然的。因而 $\Phi(v_0) = 0$。因为 $\Phi|E_0$ 是内射的，因此 $v_0 = 0$，所以 $v \in T_{(\xi,x)}(W_0)$。

由此即得，E' 在 $T_x(V)$ 上的投影 E 是 q 维的，因而 $\Phi(E)$ 是 $T_{F(\xi,x)}(V')$ 的一个 q 维子空间，并且 $\Phi(E) \cap T_{F(\xi,x)}(W) = \{0\}$。再一次由命题 2.16.2，这就证明了 F_ξ 在 x 处是横截的。

2.16.7 Thom **横截性定理** 令 V，V' 是两个具有可数基的 C^∞ 流形，并令 W 是 V' 的一个闭子流形，则从 V 到 V' 中的横截于 W 的 C^∞ 映射的集合在 $C^\infty(V, V')$ 中是稠的。

证明 V 是可数个紧集的并集。因而，由引理 2.16.4 和命题 2.16.5，从 V 到 V' 中的横截于 W 的 C^∞ 映射的集合是 $C^\infty(V, V')$ 中可数个开稠集的交集。由于 $C^\infty(V, V')$ 是一个完备度量空间，因而本定理从 Baire 定理即得，Baire 定理断言，一个完备度量空间中可数个开稠集的交集仍然是稠的；可参阅 Bourbaki [1958]。

2.16.8 注 实际上，下述事实也是对的：在 $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$ 的拓扑中，与 W 横截的 C^∞ 映射的集合构成 $C^\infty(V, V')$ 的一个稠子集。这从命题 2.16.5 和下述事实即得：虽然 $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$ 不是完备度量空间，但是 Baire 定理在这个空间中仍然成立；可参阅 Cartan [1962]。

注：G. de Rham 教授曾经指出，Poincaré 引理由 V. Volterra 在 Academia dei Lincei (4) 5 (1889), pp. 158-165, 291-299, 599-611 中的三篇短文中首先提出并证明的。事实上，他的证明基本上就是在 E. Cartan [1958] 中给出的证明。

第三章　线性椭圆微分算子

§3.1. 向　量　丛

3.1.1　定义　令 X, E 是 Hausdorff 空间，$p: E \to X$ 是一个连续映射．三元组 $\xi = (E, p, X)$ 称为空间 X 上的一个秩为 q 的复向量丛(或者简称为 X 上的丛)，如果满足下面两个条件：

(a) 对于每个 $a \in X$，$p^{-1}(a) = E_a$ 被赋予一个 q 维复向量空间的结构．

(b) 对于任何 $a \in X$，存在 a 的一个邻域 U 和从 $p^{-1}(U) = E_U$ 到 $U \times \mathbf{C}^q$ 上的一个同胚 $h = h_U$，使得若 π 表示从 $U \times \mathbf{C}^q$ 到 U 上的投影映射，则在 E_U 上我们有 $\pi \circ h = p$ [即，若 $y \in E_x, x \in U$，则 $\pi(h(y)) = x$]，并且，$h|E_x$ 是一个从 E_x 到 $\{x\} \times \mathbf{C}^q$ 上的 $\mathbf{C}$ 同构．

$E_a = p^{-1}(a)$ 称为 ξ 在点 a 处的纤维．一个秩为 1 的丛称为一个线丛．我们可以用实向量空间代替复向量空间，并用同样的方法定义实向量丛．

若 E, X 是 C^k 流形 $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$，$p$ 是一个 C^k 映射，并且若可以把同胚 $h_U: E_U \to U \times \mathbf{C}^q$ 取为 C^k 微分同胚，则我们称(E, p, X) 是一个 C^k 向量丛(或者，C^k 类的向量丛)．

当 X 是一个实解析或复解析流形时，我们可以用同样的方式定义实解析和复解析向量丛．复解析向量丛也称为全纯向量丛．

3.1.2　定义　当 $\xi = (E, p, X)$，$\xi' = (E', p', X)$ 是 X 上的两个复向量丛时，则从 ξ 到 ξ' 中的一个丛映射(或者，一个射) u 是一个连续映射 $u: E \to E'$，使得 $p' \circ u = p$，并使得 $u|E_a$ 是一个从 E_a 到 E'_a 中的 $\mathbf{C}$ 线性映射．

当 $p' \circ u = p$ 时我们也用 $u: \xi \to \xi'$ 表示一个映射 $u: E \to E'$．

自然，我们可以用同样的方式来定义 C^k（实解析和复解析）丛映射。

ξ, ξ' 是两个向量丛，它们被称为同构的，如果存在丛映射 u: $E \to E'$ 和 u': $E' \to E$，使得 $u' \circ u$ 是 E 的恒等映射，$u \circ u'$ 是 E' 的恒等映射；这里 $\xi = (E, p, X)$，$\xi' = (E', p', X')$。

秩为 q 的向量丛的一个例子如下：令 $E = X \times \mathbf{C}^q$，并令 p: $E \to X$ 是自然投影映射．则三元组 $\vartheta_q = (E, p, X)$ 是一个向量丛 $\vartheta_q = \vartheta_q(X)$，它称为 X 上秩为 q 的**平凡丛**．同构于 ϑ_q 的丛称为平凡的。

由定义，任意一个秩为 q 的向量丛 $\xi = (E, p, X)$ 局部地同构于秩为 q 的平凡丛．因而，存在 X 的一个开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ 和同胚映射

$$\varphi_i : E_{U_i} = p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{C}^q,$$

使得若

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset,$$

则

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_{ij} \times \mathbf{C}^q \to U_{ij} \times \mathbf{C}^q$$

是一个同胚映射，并且具有形式

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x, v)),$$

其中，对于固定的 x，$g_{ji}(x, v)$ 是 $\mathbf{C}^q$ 的一个 $\mathbf{C}$ 线性自同构．因而

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x)v),$$

其中，对于 $x \in U_{ij}$，

$$g_{ji}(x) \in GL(q, \mathbf{C}).$$

可以直接验证，对于 $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$，我们有

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x).$$

特别地，

$$g_{ii}(x) = I$$

（这里 I 是 $GL(q, \mathbf{C})$ 中的单位矩阵），并且

$$g_{ij}(x)^{-1} = g_{ji}(x).$$

显然，映射

$$g_{ij}: x \longmapsto g_{ij}(x)$$
是从 U_{ij} 到 $GL(q, \boldsymbol{C})$ 中的一个连续映射.

诸 g_{ij} 称为丛 ξ 的转移函数(或者,转移映射).

若 ξ 是一个 C^k(或者实解析, 或者复解析) 丛,则诸 g_{ij} 是 C^k(或者实解析,或者复解析)映射.

3.1.3 注 反之,令 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间, $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖. 令 $g_{ij}: U_{ij} \to GL(q, \boldsymbol{C})$ 是连续映射, 使得对于 $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, 有 $g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$. 令 S 是拓扑和 $\bigcup_i (U_i \times \boldsymbol{C}^q \times \{i\})$. 我们在 S 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下:

$$(x, v, i) \sim (x', v', j) \text{ 若 } x' = x, \text{ 并且 } v' = g_{ji}(x) v.$$

立即可以验证,这个关系是开的, 并且它的图是闭的, 因而商空间 $E = S/\sim$ 是一个 Hausdorff 空间. 令 $p': S \to X$ 是映射

$$(x, v, i) \longmapsto x,$$

则在 p' 下,等价的点有相同的像, 因而 p' 定义了一个连续映射 $p: E \to X$. 如果 $\eta: S \to E$ 是自然的商映射,则我们有

$$p^{-1}(U_i) = \{\eta(x, v, i) \mid x \in U_i, v \in \boldsymbol{C}^q\},$$

因而 $\eta | U_i \times \boldsymbol{C}^q \times \{i\}$ 是到 $p^{-1}(U_i)$ 上的一个同胚映射. 由此即得,存在一个同胚映射

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \to U_i \times \boldsymbol{C}^q,$$

它具有在定义 3.1.1 中所要求的性质. 这样, $\xi = (E, p, X)$ 就是一个向量丛. 直接得到, ξ 的转移函数(关于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的) 恰为诸映射 g_{ij}.

若 X 是一个 C^k(实解析,复解析)流形, 诸 g_{ij} 是 C^k(实解析, 复解析) 映射, 则上面所构造的丛成为一个 C^k(实解析, 复解析)丛.

3.1.4 注 令 $\xi = (E, p, X)$ 是一个向量丛,并且,关于 X 的一个开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathscr{I}}$[1], 令

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(q, \boldsymbol{C})$$

---

1) 原文误为 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$.——译者注

是 ξ 的转移映射．令 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个加细，并令

$$\tau:\mathscr{A}\to\mathscr{I}$$

是一个"加细映射"，即，一个映射，它使得 $V_\alpha\subset U_{\tau(\alpha)}(\alpha\in\mathscr{A})$．令 $h_{\alpha\beta}$ 是 $g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}$ 在 $V_\alpha\cap V_\beta$ 上的限制；令 $\xi'=(E',p',X)$ 是如在注 3.1.3 中那样地构造的具有"转移函数" $\{h_{\alpha\beta}\}$ 的向量丛，则 E' 是

$$S'=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}(V_\alpha\times\mathbf{C}^q\times\{\alpha\})$$

的一个商．令 $u':S'\to E$ 是由

$$u'(x,v,\alpha)=\varphi_i^{-1}(x,v)$$

所定义的映射，其中 $i=\tau(\alpha)$，$\varphi_i:p^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbf{C}^q$ 是诱导诸转移函数 g_{ij} 的同构．则 u' 诱导了一个同构 $u:\xi\to\xi'$．

3.1.5 命题 令 $\xi=(E,p,X)$，$\xi'=(E',p',X)$ 是两个向量丛，$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$，$\mathfrak{U}'=\{U'_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是 X 的两个开覆盖[1]．令 $\{g_{ij}\}$，$\{g'_{\alpha\beta}\}$ 分别是 ξ，ξ' 关于覆盖 $\mathfrak{U}$，$\mathfrak{U}'$ 的转移映射族，则，ξ 和 ξ' 是同构的，当且仅当下述条件被满足：

存在 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{U}'$ 的一个公共的加细

$$\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

和加细映射

$$\tau:\Lambda\to\mathscr{I},\quad\tau':\Lambda\to\mathscr{A},$$

使得

$$V_\lambda\subset U_{\tau(\lambda)}\cap U'_{\tau'(\lambda)};$$

并存在一族连续映射 $h_\lambda:V_\lambda\to GL(q,\mathbf{C})$，使得对 $x\in V_\lambda\cap V_\mu$，有

$$h_\lambda(x)g_{\tau(\lambda)\tau(\mu)}h_\mu(x)^{-1}=g'_{\tau'(\lambda)\tau'(\mu)}(x).$$

证明 由注 3.1.4，我们可以假设 $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}'$，以及它们有相同的指标集 Λ．我们用 $\mathfrak{V}$ 表示这个覆盖．

假设 $u:\xi\to\xi'$ 是一个同构．令

$$\varphi_\lambda:p^{-1}(V_\lambda)\to V_\lambda\times\mathbf{C}^q,\quad\varphi'_\lambda:p'^{-1}(V_\lambda)\to V_\lambda\times\mathbf{C}^q$$

分别是诱导诸转移函数 $g_{\lambda\mu}$，$g'_{\lambda\mu}$ 的同构映射．则

$$u_\lambda=\varphi'_\lambda\circ u\circ\varphi_\lambda^{-1}$$

---

1) 原文误为 $\mathfrak{U}=\{U_i\}$，$\mathfrak{U}'=\{U'\}$．——译者注

是从 $V_\lambda \times \boldsymbol{C}^q$ 到自身上的一个同构映射，因而存在一族连续映射

$$h_\lambda: V_\lambda \to GL(q, \boldsymbol{C}),$$

满足

$$u_\lambda(x, v) = (x, h_\lambda(x)v); \ x \in V_\lambda, \ v \in \boldsymbol{C}^q.$$

则

$$u_\lambda \circ \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} \circ u_\mu^{-1} = \varphi'_\lambda \circ \varphi'^{-1}_\mu.$$

因为 $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}(x, v) = (x, g_{\lambda\mu}(x)v)$，并且对于 $\varphi'_\lambda \circ \varphi'^{-1}_\mu$ 类似的公式也成立，因此我们得到

$$h_\lambda g_{\lambda\mu} h_\mu^{-1} = g'_{\lambda\mu}.$$

反之，假设给定连续映射族

$$h_\lambda: V_\lambda \to GL(q, \boldsymbol{C}),$$

它们满足

$$h_\lambda g_{\lambda\mu} h_\mu^{-1} = g'_{\lambda\mu},$$

并令 $\varphi_\lambda: p^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda \times \boldsymbol{C}^q$, $\varphi'_\lambda: p'^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda \times \boldsymbol{C}^q$ 如上所述。令

$$u_\lambda(x, v) = (x, h_\lambda(x)v),$$

并考虑映射

$$\varphi'^{-1}_\lambda \circ u_\lambda \circ \varphi_\lambda: p^{-1}(V_\lambda) \to p'^{-1}(V_\lambda).$$

显然，这是一个同构映射。此外容易验证，在 $p^{-1}(V_\lambda) \cap p^{-1}(V_\mu)$ 上我们有

$$\varphi'^{-1}_\lambda \circ u_\lambda \circ \varphi_\lambda = \varphi'^{-1}_\mu \circ u_\mu \circ \varphi_\mu.$$

这就给出了一个同构映射 $u: \xi \to \xi'$.

3.1.6 注 令 $\xi_1 = (E_1, p_1, X)$，$\xi_2 = (E_2, p_2, X)$ 是两个向量丛。令 $a \in X$，$E_a = E_{1,a} \oplus E_{2,a}$。令 E 是不相交的并集

$$E = \bigcup_{a \in X} E_a,$$

并且，令 $p: E \to X$ 是映射 $e \mapsto a (e \in E_a)$.

若 U 是 X 中的一个开集，使得存在两个同构

$$\varphi_1: p_1^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{C}^{q_1}, \ \varphi_2: p_2^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{C}^{q_2},$$

则我们有一个双满映射

$$\varphi: p^{-1}(U) \to U \times C^{q_1+q_2},$$

它由 $e_1 \oplus e_2 \longmapsto (x, v_1, v_2)$ 所定义，其中 $\varphi_1(e_1) = (x, v_1)$，$\varphi_2(e_2) = (x, v_2)$. 显然，在 E 上存在一个唯一的拓扑，使得集合 $p^{-1}(U)$ 在 E 中是开的，并且，如上定义的所有映射 φ 是同胚映射. 具有这个拓扑，$\xi = (E, p, X)$ 是一个向量丛，它称为 ξ_1 和 ξ_2 的**直接和**(或者，Whitney **和**). 我们记为

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2.$$

如果关于 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}$，ξ_1，ξ_2 分别由转移映射 $g_{ij}^{(1)}$，$g_{ij}^{(2)}$ 所给出，则从上面的同构所得到的 ξ 的转移映射由

$$g_{ij}(x) = g_{ij}^{(1)}(x) \oplus g_{ij}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & g_{ij}^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

所给出.

3.1.7 注 若 ξ_1，ξ_2 是如上所述的 X 上的两个向量丛，则我们可以用同样的方式定义下面一些向量丛

$$\xi_1 \otimes \xi_2, \ \mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2) \ 和 \ \lambda^p(\xi_1),$$

使得对于任何 $a \in X$，我们分别有

$$E_a = E_{1,a} \otimes E_{2,a}, \ E_a = \mathrm{Hom}_C(E_{1,a}, E_{2,a}), \ E_a = \wedge^p E_{1,a},$$

其中 (E, p, X) 表示相应的丛. 若 $\xi_2 = \vartheta_1$ 是秩为 1 的平凡丛，则丛

$$\mathrm{Hom}(\xi_1, \vartheta_1) = \xi_1^*$$

称为 ξ_1 的**对偶丛**；它在 $a \in X$ 处的纤维是 ξ_1 在 a 处的纤维的对偶. 向量丛 $\xi_1 \otimes \xi_2$ 称为向量丛 ξ_1，ξ_2 的**张量积**，$\lambda^p(\xi_1)$ 称为 ξ_1 **的 p 次外幂**

若 $\{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖，并且 ξ_1，ξ_2 分别产生转移映射 $g_{ij}^{(1)}$，$g_{ij}^{(2)}$，则 $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ 的转移映射 g_{ij} 由

$$g_{ij}(x) = g_{ij}^{(1)}(x) \otimes g_{ij}^{(2)}(x)$$

所定义，其中，等号右端表示矩阵 $g_{ij}^{(1)}(x)$ 和 $g_{ij}^{(2)}(x)$ 的 Kronecker (或者，张量)积. 此外，ξ_1^* 的转移映射 g_{ij}^* 由

$$g_{ij}^*(x) = {}^t g_{ij}(x)^{-1}$$

所定义，其中 ${}^tA$ 表示矩阵 A 的转置.

当 L, M 是有限维向量空间，M^* 是 M 的对偶空间，并且 ξ_1，ξ_2 是两个向量丛时，同构

$$L \otimes M^* \simeq \mathrm{Hom}(M, L)$$

就产生了一个同构

$$\xi_1 \otimes \xi_2^* \simeq \mathrm{Hom}(\xi_2, \xi_1).$$

特别，对于任何向量丛 ξ，存在一个自然的同构

$$\xi \otimes \xi^* \simeq \mathrm{Hom}(\xi, \xi).$$

令 $\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2'$ 是 X 上的向量丛，并令

$$u_k: \xi_k \to \xi_k', \quad k = 1, 2$$

是丛映射．对于每个 $a \in X$，我们有 $\mathbf{C}$ 线性映射

$$u_{k,a}: E_{k,a} \to E_{k,a}',$$

$(\xi_k = (E_k, p_k, X)$，$\xi_k' = (E_k', p_k', X))$．这就给出了 $\mathbf{C}$ 线性映射

$$u_{1,a} \otimes u_{2,a}: E_{1,a} \otimes E_{2,a} \to E_{1,a}' \otimes E_{2,a}',$$

而这个映射又定义了一个丛映射

$$u_1 \otimes u_2: \xi_1 \otimes \xi_2 \to \xi_1' \otimes \xi_2'.$$

用同样的方式，对于任何向量丛 ξ，丛映射 $u_1: \xi_1 \to \xi_1'$ 诱导出丛映射

$$\mathrm{Hom}(\xi, \xi_1) \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi_1'); \quad \mathrm{Hom}(\xi_1', \xi) \to \mathrm{Hom}(\xi_1, \xi).$$

特别，我们有丛映射

$$u_1^*: \xi_1'^* \to \xi_1^*, \quad \lambda^p(u_1): \lambda^p(\xi_1) \to \lambda^p(\xi_1').$$

3.1.8 注 注意，我们既可以对于实向量丛，也可以对于 C^k，实解析，复解析向量丛给出相应的定义．

3.1.9 例 若 V 是一个 n 维 C^k（实解析）流形，则在 §2.2 中引入的切丛

$$T(V) = \bigcup_{a \in V} T_a(V)$$

是一个秩为 n 的实 C^{k-1}（实解析）丛；余切丛

$$T^*(V) = \bigcup_{a \in V} T_a^*(V)$$

也是一个秩为 n 的实 C^{k-1}(实解析)丛. 在定理 2.2.8 中引入的 p-形式丛 $\wedge^p T^*(V)$ 就是 $T^*(V)$ 的 p 次外幂 $\lambda^p(T^*(V))$.

若 V 是一个复解析流形, 则所有这些丛都是全纯向量丛. 此外, 在一个复流形 V 上, 我们可以定义 (p, q) 型形式的丛:

$$\mathscr{E}^*_{p,q}(V) = \bigcup_{a \in V} \mathscr{E}^*_{p,q}(V, a) \text{ (参阅注 2.4.10).}$$

这是一个 V 上的实解析复向量丛.

3.1.10 定义 令 V 是一个 C^k 流形, $\xi = (E, p, V)$ 是 V 上的一个 C^k 向量丛[1]. 令 U 是 V 中的一个开集. ξ 在 U 上的一个 C^k 截面 s 是一个 C^k 映射 $s: U \to E$, 使得 $p \circ s = \mathrm{id}_U$. 我们用 $C^k(U, \xi)$ 表示所有这样的截面的集合.

有时我们还需要考虑 ξ 的不一定是连续的截面; 它们只是一些满足 $p \circ s = \mathrm{id}_U$ 的集合映射 $s: U \to E$.

若 s 是 ξ 在 U 上的任意一个截面, 则 s (在 U 中) 的支集是集合 $\{a \in U | s(a) \neq 0_a\}$ 在 U 中的闭包; 这里 0_a 表示向量空间 $E_a = p^{-1}(a)$ 的零元素. 我们通常略去下标 a 而简单地用0表示 0_a.

我们用 $C^k_0(U, \xi)$ 表示 U 上具有紧支集的 C^k 截面的集合.

注意, 若 $\xi = \vartheta_q$ 是秩为 q 的平凡丛, 则我们可以把集合 $C^k(V, \vartheta_q)$ 典则地等同于 U 上 q 个 C^k 函数的组的集合. 如在第一章中一样, 我们用 $C^k(U, q)$ 表示这个集合. 类似地, $C^k_0(U, \vartheta_q) = C^k_0(U, q)$ 是 q 个具有紧支集的 C^k 函数的组的集合. 令 $\xi = (E, p, V)$ 是一个关于开覆盖 $\{U_i\}$, 转移映射为 g_{ij} 的向量丛[2],

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{C}^q$$

是相应的同构. 若 s 是 ξ 在 V 上的一个截面[3], 则映射

$$s_i = \varphi_i \circ s: U_i \to U_i \times \mathbf{C}^q$$

定义了映射

$$\sigma_i: U_i \to \mathbf{C}^q.$$

因为 $\varphi_i^{-1} \circ s_i = s$, 我们就知道

---

1) 原文将 (E, p, V) 误为 (E, p, X).——译者注

2), 3) 为使上下文统一起见, 我们将原文中的 X 改为 V.——译者注

$$s_i = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ s_j,$$

这就给出了

$$\sigma_i(x) = g_{ij}(x)\sigma_j(x) \text{ 对于 } x \in U_i \cap U_j.$$

反之，若映射 $\sigma_i: U_i \to \boldsymbol{C}^q$ 满足 $\sigma_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x)(x \in U_i \cap U_j)$，则它们定义了 ξ 的一个截面 s 如下：

$$s = \varphi_i^{-1} \circ s_i \text{ 在 } U_i \text{ 上}, \quad s_i(x) = (x, \sigma_i(x)).$$

这个截面是 C^k 的（实解析的或复解析的），当且仅当诸映射 σ_i 是 C^k 的（实解析的或复解析的）.

3.1.11 命题 若 ξ 是一个秩为 1 的丛（即，一个线丛），则 ξ 同构于 ϑ_1（即，ξ 是平凡的），当且仅当 ξ 有一个连续的截面 s，使得对于每个 a，$s(a) \neq 0$.

证明 为了得到结论，我们只需证明，如果存在一个这样的截面 s，则 ξ 是平凡的．我们构造一个映射 $\xi \to \vartheta_1$ 如下：若 $e \in p^{-1}(a)$，则存在一个唯一的 $\lambda \in \boldsymbol{C}$，使得 $e = \lambda s(a)$．这样，映射

$$e \longmapsto (a, \lambda)$$

就是一个从 ξ 到 ϑ_1 上的同构．

由此我们得到，若 ξ 是一个线丛，则 $\xi \otimes \xi^*$ 是平凡的．事实上，

$$\xi \otimes \xi^* \simeq \mathrm{Hom}(\xi, \xi),$$

并且，由

$$s(a) = p^{-1}(a) \text{ 的单位元素}$$

所定义的 $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ 的截面 s 是处处非零的．

自然，相应的命题对于 C^k 线丛和实解析，复解析线丛也成立．

3.1.12 注 若 $\xi = (E, p, V)$ 是一个向量丛，则对于任何开集 $U \subset V$，三元组 $(p^{-1}(U), p, U)$ 也是一个向量丛．我们用 $\xi|U$ 表示这个向量丛．对于 V 的一个闭子集，我们也用类似的记号．

§ 3.2. Fourier 变换

令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，p 是一个 ≥ 1 的实数．使得 $|f|^p$

关于 Lebesgue 测度是可积的Ω上的复值 Lebesgue 可测函数 f 的集合构成一个向量空间．这个空间关于几乎处处为零的函数组成的子空间的商空间，在范数

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

下，是一个 Banach 空间．我们用 $L^p = L^p(\Omega)$ 表示这个 Banach 空间．在不会发生混乱的时候，我们将把这个空间的元素等同于其表示函数．当 $p = 2$ 和 $f, g \in L^2(\Omega)$ 时，我们令

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

关于这个纯量积，$L^2(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间．

令 $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$．我们用

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

定义 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$，其中 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$．

令 $\mathscr{S}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上具有下述性质的 C^∞ 函数 f 的集合：对于任何整数 $N \geqslant 0$ 和任何 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，

$$(1 + |x|^2)^N D^\alpha f(x)$$

在 $\boldsymbol{R}^n$ 上是有界的．$\mathscr{S}$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Schwartz 空间，或者，$\boldsymbol{R}^n$ 上的速降函数空间．对于任何实数 p，$1 \leqslant p < \infty$，$\mathscr{S}$ 作为一个稠子空间包含在 L^p 中．再者，对于任何 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $f \in \mathscr{S}$，$D^\alpha f$ 仍在 $\mathscr{S}$ 中．特别，f 的所有的导数都是有界的．对于 $f \in \mathscr{S}$，我们有

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

以及

$$(D^\alpha \hat{f})(\xi) = ((-ix)^\alpha f(x))^\wedge.$$

此外，若 $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则对于每个 $\xi \in \boldsymbol{R}^n$，我们有

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_{L^1}.$$

从这些说明，我们得到：

3.2.1 推论 若 $f \in \mathscr{S}$，则 $\hat{f} \in \mathscr{S}$．

下文中，凡是没有给出积分区域的积分都是在 R^n 上的积分。

3.2.2 反演公式 若 $f\in\mathscr{S}$，则我们有

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi,\quad x\in R^n.$$

证明 令 $\varphi\in\mathscr{S}$，则因为 $\hat{f}$ 是有界的，所以函数 $\varphi(\xi)\hat{f}(\xi)$ 是可积的. 由 Fubini 定理，我们得到：

3.2.3

$$\begin{aligned}\int\varphi(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi&=(2\pi)^{-n/2}\int\varphi(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{\int f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dy\right\}d\xi\\&=(2\pi)^{-n/2}\int f(y)dy\int\varphi(\xi)e^{-i\langle y-x,\xi\rangle}d\xi\\&=(2\pi)^{-n/2}\int f(x+t)dt\int\varphi(\xi)e^{-i\langle t,\xi\rangle}d\xi\\&=\int f(x+t)\hat{\varphi}(t)dt.\end{aligned}$$

现在我们取 $g\in\mathscr{S}$，并令 $\varphi(\xi)=g(\varepsilon\xi)$ $(\varepsilon>0)$，则

$$\hat{\varphi}(t)=\varepsilon^{-n}\hat{g}(t/\varepsilon).$$

这给出了

$$\begin{aligned}\int g(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi&=\int f(x+t)\varepsilon^{-n}\hat{g}(t/\varepsilon)dt\\&=\int f(x+\varepsilon t)\hat{g}(t)dt,\end{aligned}$$

因为 f 和 g 是有界的，并且 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 是可积的（由推论 3.2.1，它们在 $\mathscr{S}$ 中），因此，当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们可以在积分号下取极限，因而我们得到

$$g(0)\int\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=f(x)\int\hat{g}(t)dt.$$

如果我们取

$$g(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2\right)\right),$$

则我们立即得到

$$\hat{g}(t)=g(t),$$

因而

$$g(0)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{g}(t)dt=1.$$

在上面的公式中利用这个关系式,我们就得到

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi.$$

3.2.4 推论 若 $f,\varphi\in\mathscr{S}$, 则我们有

$$\int f(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi=\int\varphi(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

这从(3.2.3)即得,如果我们在其中令 $x=0$.

3.2.5 推论 若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, 并且 $g\in\mathscr{S}$, 则我们有

$$\int g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi=\int f(x+t)\hat{g}(t)dt.$$

这从(3.2.3)的证明即得.

3.2.6 推论 若 $f,g\in\mathscr{S}$, 则我们有

$$(f,g)_{L^2}=(\hat{f},\hat{g})_{L^2}.$$

特别,对于任何 $f\in\mathscr{S}$, 我们有 $\|f\|_{L^2}=\|\hat{f}\|_{L^2}$.

证明 令 $\varphi\in\mathscr{S}$ 由

$$\overline{\varphi(t)}=\hat{g}(t)$$

所定义. 由公式 3.2.2, 我们有

$$g(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{g}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi.$$

在两边取共轭,我们就得到

$$\overline{g(x)}=(2\pi)^{-n/2}\int\varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi=\hat{\varphi}(x).$$

此时,从推论 3.2.4 即得本推论.

3.2.7 注 若对于某个 $p\geqslant 1$, $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, 则对于任何 $g\in\mathscr{S}$, 积 fg 是可积的. 对于 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, 我们用

$$(\hat{f},\varphi)=\int f(t)\hat{\varphi}(t)dt,\ \varphi\in\mathscr{S}$$

定义一个$\mathscr{S}$上的线性泛函 $\hat{f}$. 我们也称此 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换. 如果对于某个 q, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 存在 $g\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$[$L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 是在一个零测集之外为有界的可测函数 h 的集合],使得

$$(\hat{f},\varphi)=\int g(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathscr{S},$$

则我们说 $\hat{f}$ 属于 $L^q(\boldsymbol{R}^n)$，并把 $\hat{f}$ 等同于 g，记为 $\hat{f}=g$. 注意，如果这样的 g 存在，则 g 是唯一确定的（一个零测集上的值可以不同）。此外，由于推论 3.2.5，当 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 时这个定义与前面所给出的定义是相容的.

3.2.8 Plancherel 定理 若 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\hat{f}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，并且 $\|f\|_{L^2}=\|\hat{f}\|_{L^2}$.

证明 令 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则存在 $\mathscr{S}$ 中的一列元素 $\{f_\nu\}$，使得 $\|f-f_\nu\|_{L^2}\to 0$. 然而由推论 3.2.6，有

$$\|\hat{f}_\nu-\hat{f}_\mu\|_{L^2}=\|f_\nu-f_\mu\|_{L^2},$$

因此即得：当 $\nu,\mu\to\infty$ 时，

$$\|\hat{f}_\nu-\hat{f}_\mu\|_{L^2}\to 0.$$

由于 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 的完备性，存在 $g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\|g-\hat{f}_\nu\|_{L^2}\to 0.$$

显然，

$$\|g\|_{L^2}=\lim_{\nu\to\infty}\|\hat{f}_\nu\|_{L^2}=\lim_{\nu\to\infty}\|f_\nu\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}.$$

并且，对于 $\varphi\in\mathscr{S}$，由推论 3.2.4，我们即有

$$\int g(t)\varphi(t)dt=\lim_{\nu\to\infty}\int\hat{f}_\nu(t)\varphi(t)dt=\lim_{\nu\to\infty}\int f_\nu(t)\hat{\varphi}(t)dt.$$

因为在 L^2 中 $f_\nu\to f$，并且 $\hat{\varphi}\in L^2$，因此从 Schwarz 不等式即得，对于所有 $\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$\int g(t)\varphi(t)dt=\int f(t)\hat{\varphi}(t)dt=(\hat{f},\varphi).$$

这就证明了定理.

3.2.9 命题 反演公式 3.2.2 可以被写为

$$\hat{\hat{f}}(-x)=f(x)\quad 对于\ f\in\mathscr{S}.$$

从 Plancherel 定理直接得到，对于任何 $f\in L^2$，这个关系式也成立（自然，等式意味着几乎处处相等）.

若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则对于 $\varphi\in\mathscr{S}$，我们有

$$\int \varphi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int f(x+\varepsilon t)\hat{\varphi}(t)dt$$

(由推论 3.2.5). 此外，若 $\hat{f}\in L^1$，则对于任何 $x\in \boldsymbol{R}^n$，上式左端的项收敛于

$$\varphi(0)\int \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi.$$

并且，因为 $f\in L^1$，则右端的项在空间 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 中收敛于

$$f(x)\int \hat{\varphi}(t)dt.$$

由此即得，若 f 和 $\hat{f}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则几乎处处

$$\hat{\hat{f}}(-x)=f(x).$$

特别，f (几乎处处)等于一个有界连续函数.

3.2.10 命题 若 $f, g\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则对于几乎所有的 x，有

$$\int |f(x-y)g(y)|dy<\infty.$$

此外，若我们令

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy,$$

则我们有

$$\|f*g\|_{L^1}\leqslant \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}.$$

证明 只需在 $f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$ 的情形下证明此命题即可. 然而，由 Fubini 定理，

$$\int dx\int f(x-y)g(y)dy=\int g(y)dy\int f(x-y)dx$$
$$=\left(\int g(y)dy\right)\left(\int f(x)dx\right)<\infty,$$

因而命题得证.

3.2.11 注 若 $f, g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则对于几乎所有的 x，

$$\int |f(x-y)g(y)|dy<\infty,$$

并且

$$\left|\int f(x-y)g(y)dy\right|\leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

这是 Schwarz 不等式的一个平凡的结果.

3.2.12 命题 若 $f, g\in \mathscr{S}$, 则 $f*g\in \mathscr{S}$, 并且我们有

$$(f*g)^{\wedge}=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{g}.$$

证明 我们有

$$|x|^2=|x-y+y|^2\leqslant 2|x-y|^2+2|y|^2,$$

因此有

$$1+|x|^2\leqslant 2(1+|x-y|^2)(1+|y|^2).$$

因而,由注 3.2.11, 对于任何 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $x\in \boldsymbol{R}^n$, 我们有

$$(1+|x|^2)^N|D^\alpha(f*g)(x)|\leqslant 2^N\|f'\|_{L^2}\|g'\|_{L^2},$$

其中

$$f'(x)=(1+|x|^2)^N D^\alpha f(x),\ \ g'(x)=(1+|x|^2)^N g(x);$$

因而 $f*g\in \mathscr{S}$. 因此

$$\begin{aligned}(f*g)^{\wedge}(\xi)&=(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx\int f(x-y)g(y)dy\\&=(2\pi)^{-n/2}\int g(y)dy\int f(x-y)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx\\&=(2\pi)^{-n/2}\int g(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dy\int f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx\\&=(2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

3.2.13 推论 若 $f, g\in \mathscr{S}$, 则我们有

$$(fg)^{\wedge}=(2\pi)^{-n/2}\hat{f}*\hat{g}.$$

这从命题 3.2.12 和公式 3.2.2 即得.

3.2.14 注 若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 或 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, 并且 $g\in \mathscr{S}$, 则 $f*g$ 仍有意义(由命题 3.2.10 和注 3.2.11). 此外,若 $f_\nu\in \mathscr{S}$, 并且, 根据 $f\in L^1$ 或 L^2, 在 L^1 中或在 L^2 中 $f_\nu\to f$, 则 $\hat{f}_\nu*\hat{g}$ 一致收敛于 $\hat{f}*\hat{g}$ (当 $f\in L^2$ 时, 由注 3.2.11; 当 $f\in L^1$ 时, 因为 $|\hat{f}_\nu(\xi)-\hat{f}(\xi)|\leqslant \|f_\nu-f\|_{L^1}\to 0$). 再者,容易知道在两种情形中, $\hat{f}_\nu\hat{g}$ 在 L^1 中都收敛于 $\hat{f}\hat{g}$. 因而得到, 若 $g\in \mathscr{S}$, $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 或者 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, 则我们有

$$(f*g)^{\wedge}=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{g}.$$

用相同的方法我们得到，在这些假设下，

$$(fg)^\wedge = (2\pi)^{-n/2}\hat{f} * \hat{g}.$$

3.2.15 注 所有这些结果可以立刻推广到在有限维 $\boldsymbol{C}$ 向量空间中取值的函数上去. 今后我们将在这个较一般的情形中应用这些推广了的结果，而不去明确地叙述它们了.

§3.3 线性微分算子

令 V 是一个 n 维 C^∞ 流形，$\xi=(E, p, V)$ 和 $\eta=(F, q, V)$ 是 V 上的两个 C^∞ 向量丛. 我们假设 $\operatorname{rank}\xi=r$，$\operatorname{rank}\eta=s$.

3.3.1 定义 从 ξ 到 η 的一个线性微分算子（或者，微分算子）P 是一个 $\boldsymbol{C}$ 线性映射

$$P: C^\infty(V, \xi)\to C^\infty(V, \eta),$$

使得对于任何 $s\in C^\infty(V, \xi)$，有

$$\operatorname{supp}(PS)\subset\operatorname{supp}(s).$$

这里，$C^\infty(V, \xi)$，$C^\infty(V, \eta)$ 分别表示 ξ 和 η 的 C^∞ 截面的空间.

注意，对于任何开集 $U\subset V$，上述映射 P 立即导出一个 $\boldsymbol{C}$ 线性映射

$$P_U: C^\infty(U, \xi)\to C^\infty(U, \eta),$$

它也是一个线性微分算子；事实上，若 $a\in U$，令 φ 是一个具有紧支集的 C^∞ 函数，$\operatorname{supp}(\varphi)\subset U$，在 a 的一个邻域中 $\varphi=1$. 对于每个 $s\in C^\infty(U, \xi)$，我们用

$$(\varphi s)(x)=\begin{cases}\varphi(x)s(x) & \text{若 } x\in U,\\ 0 & \text{若 } x\notin U\end{cases}$$

定义一个截面 $\varphi s\in C^\infty(V, \xi)$. 我们不妨令

$$(P_U s)(a)=P(\varphi s)(a).$$

3.3.2 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并令 P 是一个从 $\mathscr{D}_r$ 到 $\mathscr{D}_s$ 中的线性微分算子，则对于任何 $a\in\Omega$，存在 a 的一个邻域 U，一个整数 $m>0$，和一个常数 $C>0$，使得对于任何

$$u \in C_0^\infty(U - \{a\}, r),$$

有

$$\|Pu\|_0 \leqslant C\|u\|_m.$$

我们回忆一下，$C_0^\infty(U, r)$ 上的范数由

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha u_j(x)|, \ u = (u_1, \cdots, u_r)$$

所定义。

(3.3.2)的证明 假设此命题在 $a \in \Omega$ 的邻域中不成立。令 U 是 Ω 中的一个相对紧集，则存在一个开集

$$U_1 \Subset U_0 - \{a\}$$

和一个

$$u_1 \in C_0^\infty(U_1, r),$$

使得

$$\|Pu_1\|_0 > 2^2\|u_1\|_1.$$

但是，$U_0 - \bar{U}_1$ 是 a 的一个邻域，因此，由我们的假设，存在一个开集

$$U_2 \Subset U_0 - \bar{U}_1 - \{a\}$$

和一个

$$u_2 \in C_0^\infty(U_2, r),$$

使得

$$\|Pu_2\|_0 > 2^{2 \cdot 2}\|u_2\|_2.$$

用归纳法，我们可以构造一列开集 $\{U_k\}$，满足

$$\bar{U}_k \subset U_0 - \{a\}, \ \bar{U}_k \cap \bar{U}_l = \varnothing, \ 若\ k \neq l,$$

以及

$$u_k \in C_0^\infty(U_k, r),$$

使得

$$\|Pu_k\|_0 > 2^{2 \cdot k}\|u_k\|_k.$$

令

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} u_k}{\|u_k\|_k}.$$

显然，此级数在 C^∞ 中收敛，因而

$$u \in C_0^\infty(U', r),$$

若 U' 是 $\overline{U}_0$ 在 Ω 中的一个相对紧邻域。并且，

$$u|U_k = 2^{-k}\|u_k\|_k^{-1}u_k|U_k.$$

对于所有 f，有 supp $(Pf) \subset$ supp (f)，从这一事实即得

$$Pu|U_k = 2^{-k}\|u_k\|_k^{-1}(Pu_k)|U_k.$$

因为 $\|Pu_k\|_0 > 2^{2k}\|u_k\|_k$，所以存在 $x_k \in U_k$，使得

$$|Pu_k(x_k)| > 2^{2k}\|u_k\|_k,$$

因而 $|Pu(x_k)| > 2^k$。另一方面，因为 $u \in C^\infty(\Omega, r)$，所以 Pu 在 Ω 上是连续的，因而在 $\overline{U}_0$ 上是有界的。这是一个矛盾，因而就证明了命题 3.3.2。

3.3.3 Peetre **定理** 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，P 是一个从 ϑ_r 到 ϑ_s 中的线性微分算子，则对于任何相对紧子集 $\Omega' \Subset \Omega$，存在一个 $m \geqslant 0$，并存在从 Ω' 到线性映射 $\boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^s$（换句话说，即 $r \times s$ 矩阵）的空间中的 C^∞ 映射 a_α，使得对于任何 $u \in C^\infty(\Omega', r)$ 和 $x \in \Omega'$，我们有

3.3.4
$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x).$$

证明 令 U 是 Ω 的任一开子集，并且假设存在常数 $C > 0$，$m > 0$，使得

3.3.5
$$\|Pu\|_0 \leqslant C\|u\|_m \text{ 对于所有 } u \in C_0^\infty(U, r).$$

我们首先证明：

3.3.6 若 $u \in C_0^\infty(U, r)$，并且 u 在 $a \in U$ 处是 m-平坦的（定义 1.5.1），则 $(Pu)(a) = 0$。

由引理 1.5.2，在 $C_0^\infty(U, r)$ 中存在一列在 a 的邻域中等于 0 的元素 $\{u_\nu\}$，使得当 $\nu \to \infty$ 时 $\|u_\nu - u\|_m$ 趋于零。由 (3.3.5)，Pu_ν 在 U 上一致收敛于 Pu。然而，因为

$$\text{supp } (Pu_\nu) \subset \text{supp } (u_\nu),$$

并且 u_ν 在 a 附近为 0，即得

$$(Pu_\nu)(a) = 0,$$

因而

$$(Pu)(a)=\lim(Pu_\nu)(a)=0.$$

令 $e_1, \cdots, e_r$ 是 $\boldsymbol{R}^r$ 的一个基．若 $u\in C^\infty(U, r)$，则我们有

$$u=\sum_{j=1}^{r} u_j e_j,\ u_j\in C^\infty(U, 1).$$

对于 $a\in U$，令 $\mu_{\alpha,a}$ 是单项式

$$\mu_{\alpha,a}(x)=(x-a)^\alpha,$$

则我们有

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\ \mu_{\alpha,a}\sum_{j=1}^{r} D^\alpha u_j e_j+f,$$

其中 f 在 a 处是 m-平坦的．因而，由(3.3.6)我们即有

$$(Pu)(a)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\alpha!}P(\mu_{\alpha,a}e_j)(a)D^\alpha u_j(a).$$

因为

$$\mu_{\alpha,a}=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-a)^{\alpha-\beta}\mu_{\beta,0},$$

并且，由假设 $P(\mu_{\beta,0}e_j)$ 是一个从 Ω 到 R^s 中的 C^∞ 映射，所以映射 $a\longmapsto P(\mu_{\alpha,a}e_j)(a)$ 是一个从 Ω（而不只是从 U）到 R^s 中的 C^∞ 映射．我们就得到：

3.3.7 若(3.3.5)成立，则存在从 Ω 到 $s\times r$ 矩阵空间中的 C^∞ 映射 a_α，使得对于所有 $u\in C^\infty(U, r)$，我们有

$$(Pu)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x),\ x\in U.$$

现在我们可以来证明定理了．从命题 3.3.2 即得，若 $\Omega'\Subset\Omega$，则存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_N\in\bar{\Omega}'$ 和常数 $C, m>0$，使得对于所有

$$u\in C_0^\infty(\Omega'-\bigcup\{x_\nu\}, r),$$

有

$$\|Pu\|_0\leqslant C\|u\|_m.$$

由(3.3.7)，存在从 Ω' 到 $\boldsymbol{R}^r$ 中的 C^∞ 映射 a_α，使得

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x), \quad x\in\Omega' - \{x_1\} - \cdots - \{x_N\}.$$

因为这个方程的两边在 Ω' 中都是连续的，我们就得到了方程 3.3.4。

下面的定理是 Peetre 定理的另一形式。

3.3.8 定理 令 V 是一个 C^∞ 流形，并令 ξ，η 分别是秩为 r 和 s 的 C^∞ 向量丛．令 P 是一个从 ξ 到 η 的线性微分算子．则每个点 $a\in V$ 有一个邻域 U，它微分同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，使得 ξ 和 η 在 U 上都是平凡的，并且 Ω 上从 ϑ_r 到 ϑ_s 的诱导算子有形式

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha,$$

其中 a_α 是 C^∞ 的 $s\times r$ 矩阵．

令 V 是一个 C^∞ 流形，$a\in V$，并令 $\boldsymbol{m}_a$ 是在 a 处为 0 的 C^∞ 函数的芽组成的环(参阅定义 2.1.8 之后的定义)．令 ξ，η 是 V 上的 C^∞ 向量丛，P 是一个从 ξ 到 η 的线性微分算子．对于 $a\in V$，我们分别用 ξ_a，η_a 表示 ξ，η 在 a 处的纤维．

3.3.9 定义 P 在 $a\in V$ 处的阶 $o_P(a)$ 是满足下述条件的整数 m 中之最大者：对于某个 $f\in\boldsymbol{m}_a$ 和某个截面 $s=C^\infty(V,\xi)$，有 $P(f^m s)(a)\neq 0$．P 的阶即为 $\max_{a\in V} o_P(a)$．

3.3.10 注 容易验证，一个由(3.3.4)所给出的算子的阶是满足下述条件的整数 m 中之最大者：存在一个 α，满足 $|\alpha|=m$ 以及 $a_\alpha\neq 0$．

下面的定理属于 Hörmander [1964]，并且已经证实了它对于此后的发展具有极大的重要性，因为它直接导致拟微分算子的理论．

由于任何一个向量丛局部地同构于平凡丛，因此我们可以谈论，一个元素列 $\{s_\nu\}\subset C^\infty(V,\xi)$ 与其所有偏导数的局部一致收敛性．一个 $\boldsymbol{C}$ 线性映射 $L:C^\infty(V,\xi)\to C^\infty(V,\eta)$ 称为弱连续的，如果对于 $C^\infty(V,\xi)$ 中任何一个截面序列 $\{s_\nu\}$——它与所有偏导数一起局部一致地收敛于 $s\in C^\infty(V,\xi)$，序列 $\{Ls_\nu\}$ 在任何紧子

集上一致地收敛于 Ls。

3.3.11 定理 一个弱连续的 $\boldsymbol{C}$ 线性映射

$$L: C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$$

是一个 $\leqslant m$ 阶的线性微分算子，当且仅当下述条件被满足：

对于任何 $S \in C^\infty(V, \xi)$, $a \in V$, 和 V 上任何实值 C^∞ 函数 f, 函数

$$\kappa(\lambda)(a) = e^{-i\lambda f(a)}\{L(se^{i\lambda f})(a)\}$$

是 λ 的一个次数 $\leqslant m$ 的多项式，取值于 η_a 中。

证明 通过在局部坐标中的计算可以直接验证下述事实：对于阶数 $\leqslant m$ 的任何线性微分算子 L, $\kappa(\lambda)$ 是一个次数 $\leqslant m$ 的多项式。

为了证明其逆，我们如下进行。我们记

$$\kappa(\lambda)(a) = \sum_{\nu=0}^{m} \kappa_\nu(f, s)(a)\lambda^\nu,$$

则映射

$$a \longmapsto \kappa_\nu(f, s)(a)$$

定义了一个元素

$$\kappa_\nu(f, s) \in C^\infty(V, \eta).$$

当 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是实数，$f_1, \cdots, f_k$ 是实值函数时，我们令

$$e^{-it(\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_k f_k)}L(se^{it(\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_k f_k)}) = \sum_{\nu=0}^{m} \kappa_\nu(\lambda, f, s)t^\nu,$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$, $f = (f_1, \cdots, f_k)$.

我们知道

$$\kappa_\nu(\lambda, f, s) \in C^\infty(V, \eta),$$

并且，对于固定的 λ 和 $u > 0$, 我们有

$$\kappa_\nu(u\lambda, f, s) = u^\nu \kappa_\nu(\lambda, f, s).$$

这样，我们得到（例如，从 Taylor 公式）$\kappa_\nu(\lambda, f, s)(a)$ 是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 的 ν 次齐次多项式。

现在令 $a, b \in V$, $a \neq b$, U 是 a, b 的一个邻域，并令 $\varphi: U \to \Omega$ 是一个从 U 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个开集 Ω（不一定是连通的）上的 C^∞ 微

分同胚.

对于任何$\beta\in C_0^\infty(\Omega)$，由反演公式 3.2.2，我们有

$$\beta(y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i(y,\lambda)}d\lambda,$$

其中$\hat{\beta}$是β的 Fourier 变换．因而，如果$s\in C^\infty(V,\xi)$，并且我们令$s_0(x)=s(x)\beta(\varphi(x))$，则我们有

$$s_0(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i(\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(x))}s(x)d\lambda_1\cdots d\lambda_n.$$

因为L是弱连续的，我们就得到

$$\begin{aligned}L(s_0)(a)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{\beta}(\lambda)L\{se^{i(\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_n\varphi_n)}\}(a)d\lambda\\&=(2\pi)^{-n/2}\sum_{\nu=0}^{m}\int_{R^n}\hat{\beta}(\lambda)\kappa_\nu(\lambda,\varphi,s)(a)e^{i(\lambda,\varphi(a))}d\lambda\\&=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{|\alpha|=\nu}\sigma_{\alpha,\nu}(a)(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{\beta}(\lambda)e^{i(\lambda,\varphi(a))}\lambda^\alpha d\lambda,\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_{\alpha,\nu}\in C^\infty(V,\eta),$$

因为正如已经注意到的那样，$\kappa_\nu(\lambda,\varphi,s)(a)$是$\lambda$的$\nu$次齐次多项式，取值于$\eta_a$中．由反演公式，这就给出

3.3.12 $$L(s_0)(a)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{|\alpha|=\nu}\sigma_{\alpha,\nu}(a)i^{-|\alpha|}(D^\alpha\beta)(\varphi(a)).$$

我们容易得到，如果$s\in C_0^\infty(V,\xi)$，并且支集包含在a的一个小邻域中，则

$$\operatorname{supp}(Ls)\subset\operatorname{supp}(s);$$

事实上，若$b\notin\operatorname{supp}(s)$，则我们只需把(3.3.12)应用于一个如下选取的函数β：当x在b的附近时$\beta(\varphi(x))=0$，当x在$\operatorname{supp}(s)$的一个邻域中时$\beta(\varphi(x))=1$．因此即得L是一个线性微分算子．L的阶$\leqslant m$容易从(3.3.12)得到．　　　　证毕．

令V是一个C^∞流形，ξ和η是V上的两个C^∞向量丛．令P是一个从ξ到η的线性微分算子，并假设P的阶是m．令$T^*(V)$

是 V 的实余切从(§2.2)，$p^*: T^*(V) \to V$ 是自然投影映射. 令 $\xi = (E, p, V)$，$\eta = (F, q, V)$，以及

$$E \times_V T^*(V) = \{(e, \omega) \in E \times T^*(V) \mid p(e) = p^*(\omega)\}.$$

[换句话说，它由 $a \in V$，a 处的一个余切向量和 a 上纤维 E_a 的一个元素组成.]我们定义一个映射

$$\sigma: E \times_V T^*(V) \to F$$

如下. 若 $a \in V$ 和 $\omega \in T_a^*(V)$，则令 $f \in \boldsymbol{m}_a$ 是诱导 ω 的一个 C^∞ 函数,即，$\omega = (df)(a)$. 令 $e \in E_a$，并令 $s \in C_0^\infty(V, \xi)$，使得 $s(a) = e$ (这样的 s 总是存在的). 我们定义

$$\sigma(e, \omega) = P(f^m s)(a).$$

注意,若 $s(a) = 0$，则 $f^m s$ 在 a 处有一个"阶数 $> m$ 的零点",因而在这个情形中 $P(f^m s)(a) = 0$. 这样，$\sigma(e, \omega)$ 只依赖于 e，而不依赖于满足 $s(a) = e$ 的 s. 此外，若 $g \in \boldsymbol{m}_a$，并且 $d(f - g)(a) = 0$，则 $f \equiv g \bmod \boldsymbol{m}_a^2$，因而我们得到 $f^m - g^m \in \boldsymbol{m}_a^{m+1}$. 因而,对于任何 $s \in C_0^\infty(V, \xi)$，有

$$P(f^m s)(a) = P(g^m s)(a).$$

3.3.13 定义 如此定义的映射 $\sigma = \sigma_P: E \times_V T^*(V) \to F$ 称为算子 P 的**算符**[1].

3.3.14 定义 从 ξ 到 η 的一个线性微分算子 P 称为**椭圆的**,如果对于每个 $\omega \in T_a^*(V)$，$\omega \neq 0$，$\mathbf{C}$ 线性映射

$$\sigma_a(\omega): E_a \to F_a, \quad e \mapsto \sigma(e, \omega)$$

是**内射的**. 在这种情况下，我们还将把 P 简称为从 ξ 到 η 的一个椭圆算子.

3.3.15 例 (a) 令 V 是一个 n 维 C^∞ 流形,并令 $\mathscr{A}^p = \mathscr{A}^p(V)$ 是 V 上(复值) C^∞ 微分 p-形式的集合. 若 $\mathscr{E}^p = \wedge^p \mathfrak{T}^*(V)$ 是 V 上复值形式的丛,则 $\mathscr{A}^p = C^\infty(V, \mathscr{E}^p)$ (定理 2.2.8). 外微分运算

$$d: \mathscr{A}^p \to \mathscr{A}^{p+1}$$

---

1) 我们把 symbol 译为"算符".——译者注

是一个从 $\mathscr{E}^p$ 到 $\mathscr{E}^{p+1}$ 的一阶微分算子．算子 $d:\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^1$ 的算符由

$$\sigma(e,\omega)=e\omega,\ e\in E_a^0,\ \omega\in T_a^*(V)$$

所给出(注意,典则地 $\mathscr{E}_a^0\simeq \boldsymbol{C}$,因而上面的乘积有意义)．我们容易推得 $d:\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^1$ 是椭圆的．

(b) 令 V 是一个复 n 维的复流形，并令 $\mathscr{A}^{p,q}$ 表示 V 上 (p,q) 型的 C^∞ 微分形式的空间．若 $\mathscr{E}^{p,q}$ 是 (p,q) 型形式的丛，则 $\mathscr{A}^{p,q}=C^\infty(V,\mathscr{E}^{p,q})$ (§2.4)．算子 $\bar\partial:\mathscr{A}^{p,q}\to\mathscr{A}^{p,q+1}$ 是一个从 $\mathscr{E}^{p,q}$ 到 $\mathscr{E}^{p,q+1}$ 的一阶微分算子．若 $q=0$，则 $\bar\partial$ 的算符由

$$\sigma(e,\omega)=\omega_0\wedge e,\ e\in\mathscr{E}_a^{p,0},\ \omega\in T_a^*(V)$$

所定义，其中 ω_0 是 ω 在 $\mathscr{E}^{0,1}(V,a)\subset\mathfrak{T}_a^*(V)$ 上的投影．注意，若 ω 是一个实的余向量，则映射 $\omega\mapsto\omega_0$ 是内射的．因为 e 是 $(p,0)$ 型的，ω_0 是 $(0,1)$ 型的，因此，$\omega_0\wedge e=0$，当且仅当 $\omega_0=0$，$e=0$．由此即得 $\bar\partial:\mathscr{A}^{p,0}\to\mathscr{A}^{p,1}$ 是椭圆的．

(c) 容易验证，在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开集上由

$$(u_1,\cdots,u_r)\mapsto(\Delta u_1,\cdots,\Delta u_r),$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

所给出的从 ϑ_r 到 ϑ_r 的算子是椭圆的．它称为 Laplace 算子．我们仍用 Δ 表示这个算子．

令 V 是一个在无穷远处可数的可定向 C^∞ 流形．令 $\mathfrak{T}^*(V)$ 表示复的余向量丛，并令

$$\mathscr{E}^n=\mathscr{E}^n(V)=\wedge^n\mathfrak{T}^*(V).$$

若 $\xi=(E,p,V)$ 是 V 上任一向量丛，ξ^* 是它的对偶丛，我们令

$$\xi'=\xi^*\otimes_{\boldsymbol{C}}\mathscr{E}^n,$$

并称它为 ξ 的转置丛．对于每个 $a\in V$，在一个向量空间和它的对偶空间之间的自然配对定义了一个映射

$$B_a:E'_a\times E_a\to\mathscr{E}_a^n,\ \xi'=(E',p',V).$$

这就给出了一个映射

$$B:C^\infty(V,\xi')\times C^\infty(V,\xi)\to C^\infty(V,\mathscr{E}^n),$$

它定义如下．若 $s'\in C^\infty(V,\xi')$，$s\in C^\infty(V,\xi)$，则

$$B(s',s)(a)=B_a(s'(a),s(a)).$$

若 $\operatorname{supp}(s)\cap\operatorname{supp}(s')$ 是紧的，则 $B(s',s)$ 是 V 上的一个具有紧支集的 C^∞ n-形式，我们定义

$$\langle s',s\rangle_\xi=\langle s',s\rangle=\int_V B(s',s).$$

我们也可以定义纯量积 $\langle s,s'\rangle_{\xi'}$（注 3.3.16 (a)），并且我们有 $\langle s,s'\rangle_{\xi'}=\langle s',s\rangle_\xi$.

3.3.16 注 (a) 我们有

$$(\xi')'=(\xi')^*\otimes\mathscr{E}^n=\xi\otimes(\mathscr{E}^n)^*\otimes\mathscr{E}^n,$$

它典则同构于 ξ，这是因为 $\mathscr{E}^n$ 是一个线丛，我们可以应用 §3.1.11 末尾的注记[1]（即，对于一个线丛 η，$\eta\otimes\eta^*$ 是典则平凡的）.

(b) 若 ξ 是平凡的，$\xi=(E,p,V)$，并且

$$h:\xi\to V\times\boldsymbol{C}^q$$

是一个同构，则我们有一个定义为 h 的逆转置的同构

$$h^*:\xi^*\to V\times\boldsymbol{C}^q$$

（即，对于每个 $a\in V$，$h_a^*={}^t h_a^{-1}$）．此外，若 $x\in E_a$，$y^*\in E_a^*$，则

$$y^*(x)=\sum_{j=1}^q x_j y_j,$$

其中 $h(x)=a\times(x_1,\cdots,x_q)$，$h^*(y^*)=a\times(y_1,\cdots,y_q)$.
我们将把 $h(x)$ 等同于它在 $\boldsymbol{C}^q$ 上的投影 $(x_1,\cdots,x_q)$.

3.3.17 命题 令 P 是在一个开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的从 ϑ_r 到 ϑ_s 的一个线性微分算子，它由

$$(Pu)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$$

所给出．则存在一个唯一的从 ϑ_s 到 ϑ_r 的线性微分算子 P^*，它称为 P 的形式伴随算子，使得对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega,r)$，$v\in C_0^\infty(\Omega,s)$，有

---

1) 原文将 §3.1.11 误为 §3.1.——译者注

$$\int_\Omega (Pu(x), v(x))dx = \int_\Omega (u(x), P^* v(x))dx;$$

这里，在 $\boldsymbol{C}^r$ 的向量之间的纯量积 (u_1, u_2) 由

$$(u_1, u_2) = \sum_{\nu=1}^{r} u_{1\nu}\bar{u}_{2\nu}, \quad u_j = (u_{j1}, \cdots, u_{jr})$$

所定义. 并且，P^* 由公式

$$(P^* v)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha({}^t\overline{a_\alpha(x)} v(x))$$

所给出；这里，当 A 是一个矩阵时，${}^tA$ 表示 A 的转置矩阵，$\bar{A}$ 表示一个矩阵，它的元素是 A 的相应的元素的复共轭. 这容易从公式

$$\int_\Omega \varphi(x)\overline{D^\alpha\phi(x)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha\varphi(x)\overline{\phi(x)}dx$$

得到，其中 $\varphi, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

3.3.18 定理 令 P 是一个从 ξ 到 η 的线性微分算子，其中 ξ, η 是流形 V 上的向量丛，则存在一个唯一的从 η' 到 ξ' 的线性微分算子 P'，使得对于所有 $s \in C_0^\infty(V, \xi)$, $t' \in C_0^\infty(V, \eta')$，有

3.3.19 $$\langle s, P't' \rangle_{\xi'} = \langle Ps, t' \rangle_{\eta'}.$$

证明 显然，若 $t' \in C_0^\infty(V, \eta')$，则对于所有 $s \in C_0^\infty(V, \xi)$ 满足(3.3.19)的一个截面

$$P't' \in C_0^\infty(V, \xi')$$

是唯一确定的. 并且，若 t' 在一个开集 $U \subset V$ 上等于 0，则对于满足 supp $(s) \subset U$ 的所有 s，有 $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$，因而，若(3.3.19)成立，则对于满足 supp $(s) \subset U$ 的所有 s，有 $\langle s, P't' \rangle_{\xi'} = 0$，由此即得 $P't'$ 在 U 上等于 0. 因而，只需在 V 是一个开集 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$，$\xi$ 和 η 在 Ω 上是平凡的情形中证明 P' 的存在性即可.

令

$$h_\xi: \xi \to \Omega \times \boldsymbol{C}^r, \quad h_\eta: \eta \to \Omega \times \boldsymbol{C}^s$$

是同构映射，并令 h_ξ^* 和 h_η^* 是相应的对偶丛的同构映射(注 3.3.16, (b)). 在这些同构下，令 P 由

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

所给出．若 $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ 表示 Ω 上的标准 n-形式，则任一元素

$$t'_a\in F'_a=F^*_a\otimes\mathscr{E}^n_a$$

可被唯一地写成下述形式

$$t'_a=g_a\otimes(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)_a,\quad g_a\in F^*_a.$$

若 $t'\in C_0^\infty(\Omega,\eta')$，$t'=g\otimes(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)$，则令

$$P't'=f\otimes(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n).$$

这里 f 由

$$h^*_\xi(f)=\overline{P}^*(h^*_\eta(g))$$

所定义；P^* 是命题 3.3.17 中所说的 P 的形式伴随算子，并且，对于任何一个算子

$$L=\sum c_\alpha(x)D^\alpha,$$

我们已令

$$\overline{L}=\sum\overline{c_\alpha(x)}D^\alpha.$$

若 $s\in C_0^\infty(\Omega,\xi)$，并且 t' 如上所述，则我们有

$$\begin{aligned}\langle Ps,t'\rangle_{\eta'}&=\int_\Omega(Ph_\xi(s),\overline{h^*_\eta(g)})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\&=\int_\Omega(h_\xi(s),P^*\overline{h^*_\eta(g)})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\&=\langle s,P't'\rangle_{\xi'}.\end{aligned}$$

3.3.20 定义 如上所定义的算子 P' 称为 P 的(形式)**转置**算子．

3.3.21 注 若 V 是一个实解析流形，ξ 和 η 是 V 上的实解析丛，则，一个算子 $P:C^\infty(V,\xi)\to C^\infty(V,\eta)$ 称为有解析系数的，如果对于 ξ 在 V 的开集上的任一解析截面 s，Ps 是解析的．容易得到，P 有解析系数，当且仅当按照 V 上的局部坐标和 ξ，η 与平凡丛之间的(解析)同构，P 由

$$(Pu)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$$

所给出，其中 a_α 是到 $s\times r$ 矩阵空间中的实解析映射．并且，此时转置算子 P' 也有解析系数．

3.3.22 注 若 P 是一个从 ξ 到 η 的椭圆算子，且若 $\mathrm{rank}(\xi)=\mathrm{rank}(\eta)$，则 P' 也是椭圆算子．

注意，关于秩的条件是必要的，因为如果存在一个从丛 ξ 到丛 η 的椭圆算子，则 $\operatorname{rank}(\xi) \leqslant \operatorname{rank}(\eta)$.

定理 3.3.3 属于 Peetre [1960]，定理 3.3.11 属于 Hörmander [1965].

§3.4. Sobolev 空间

令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，p 是一个 $\geqslant 1$ 的实数，q，m 是两个整数，满足 $q \geqslant 1$，$m \geqslant 0$. 令

$$f=(f_1, \cdots, f_q): \Omega \to \boldsymbol{C}^q$$

是一个 C^∞ 映射. 考虑满足

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{j=1}^{q} \int_{\Omega} |D^\alpha f_j(x)|^p dx < \infty$$

的所有 C^∞ 映射 $f: \Omega \to \boldsymbol{C}^q$ 的空间. 我们在这个空间上用

$$|f|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{j=1}^{q} \int_{\Omega} |D^\alpha f_j(x)|^p dx$$

定义一个范数 $|f|_{m,p}$.（注意，从 Minkowski 不等式即得三角不等式.）在需要强调此范数对于 Ω 的依赖性时，我们将用 $|f|_{m,p}^{\Omega}$ 表示这个范数.

3.4.1 定义 上面所述的空间关于范数 $|f|_{m,p}$ 的完备化称为 Sobolev 空间 $H_{m,p}(\Omega)$. 从 Ω 到 $\boldsymbol{C}^q$ 中的具有紧支集的 C^∞ 映射的空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于 $|f|_{m,p}$ 的完备化用 $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ 表示.

令 $v_1, v_2 \in \boldsymbol{C}^q$，$v_j=(v_{j1}, \cdots, v_{jq})$. 如通常一样，我们令

$$(v_1, v_2)=\sum_{\nu=1}^{q} v_{1\nu} \bar{v}_{2\nu}.$$

若 $f=(f_1, \cdots, f_q): \Omega \to \boldsymbol{C}^q$ 和 $g=(g_1, \cdots, g_q): \Omega \to \boldsymbol{C}^q$ 是两个可测映射，且若诸乘积 $f_\nu(x)\overline{g_\nu(x)}$ 是可和的，则我们令

$$\langle f, g\rangle=\sum_{\nu=1}^{q} \int_{\Omega} f_\nu(x) \overline{g_\nu(x)} dx=\int_{\Omega}(f(x), g(x)) dx.$$

3.4.2 注 令 $f=(f_1, \cdots, f_q)$，$f_\nu \in L^p(\Omega)$，则我们简记为 $f\in L^p(\Omega, q)$，或者 $f\in L^p$. 如果对于任何 α，$|\alpha|\leqslant m$，存在函数 $h^\alpha \in L^\kappa(\Omega,q)(1\leqslant \kappa \leqslant \infty)$，使得对于所有 $g\in C_0^\infty(\Omega, q)$，我们有

$$\int_\Omega (f(x), D^\alpha g(x))dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (h^\alpha(x), g(x))dx,$$

则我们说 f 在 L^κ 中有直到 m 阶的弱导数. 诸 h^α 称为 f 的弱导数. 注意，如果 h^α 存在，则是唯一确定的（精确到相差一个零测集上的值）.

如果 $\{f_\nu\}$ 是 $C^\infty(\Omega, q)$ 中的一列元素，它在 $H_{m,p}(\Omega)$ 中收敛，则对于 $|\alpha|\leqslant m$，$\{D^\alpha f_\nu\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛. 我们令它在 L^p 中的极限为 f^α，则对于任何 $g\in C_0^\infty(\Omega, q)$，我们有

$$\langle f_\nu, D^\alpha g\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha f_\nu, g\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle f^\alpha, g\rangle.$$

由此即得 f^α 是

$$f=f^0=\lim f_\nu$$

的弱导数. 特别，若 $\{f_\nu\}$，$\{g_\nu\}$ 是两个定义 $H_{m,p}(\Omega)$ 的同一元素的序列，则

$$\lim D^\alpha f_\nu = \lim D^\alpha g_\nu \quad 对于\ |\alpha|\leqslant m.$$

这样，如果 $f\in H_{m,p}(\Omega)$，则我们可以用

$D^\alpha f=\lim D^\alpha f_\nu$，若在 $H_{m,p}(\Omega)$ 中 $f_\nu \to f$，$f_\nu \in C^\infty(\Omega, q)$ 来定义 $D^\alpha f$. 现令 $0\leqslant m'\leqslant m$，$f\in H_{m,p}(\Omega)$. 则存在一个定义 f 的函数列 $\{f_\nu\}$，$f_\nu\in C^\infty(\Omega, q)$，关于范数 $|g|_{m,p}$，它是一个 Cauchy 序列. 然而 $|g_{m',p}|\leqslant |g|_{m,p}$，因而关于范数 $|g|_{m',p}$，$\{f_\nu\}$ 也是一个 Cauchy 序列，因此它定义了一个元素 $f'\in H_{m',p}(\Omega)$，显然，f' 不依赖于定义 f 的序列 $\{f_\nu\}$. 我们令

$$f'=i(f)=i_{m,m'}(f).$$

3.4.3 命题 线性映射 $i: H_{m,p}(\Omega)\to H_{m',p}(\Omega)$ 是一个内射映射.

证明 若 $i(f)=0$，并且 $\{f_\nu\}$ 是一列定义 f 的 $C^\infty(\Omega, q)$ 中的元素，则在 $L^p(\Omega)$ 中 $f_\nu\to 0$. 如果 $g\in C_0^\infty(\Omega, q)$，则对于 $|\alpha|\leqslant m$，我们有

$$0=\lim\langle f_\nu, D^\alpha g\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim\langle D^\alpha f_\nu, g\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle f^\alpha, g\rangle,$$

以至 $|\alpha| \leqslant m$ 时 $f^\alpha = 0$，因而在 $H_{m,p}(\Omega)$ 中 $f = 0$. 证毕.

自然，

3.4.4 $$i(\mathring{H}_{m,p}(\Omega)) \subset \mathring{H}_{m',p}(\Omega).$$

并且，若 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega, 1)$，则对于任何 $f \in H_{m,p}(\Omega)$，我们有

$$\varphi f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega),$$

而且我们有

$$D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} f \quad 对于\ |\alpha| \leqslant m.$$

此外，显然的包含关系 $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 产生了一个保持范数的映射

$$\mathring{H}_{m,p}(\Omega) \to \mathring{H}_{m,p}(\boldsymbol{R}^n).$$

因而我们将经常把 $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ 等同于 $\mathring{H}_{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ 的一个子空间.

3.4.5 Poincaré **不等式** 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，并令 $f \in C_0^\infty(\Omega)$. 若 M 充分大(只依赖于 Ω)，则我们有

$$f(x) = \int_{-M}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)dt,$$

因而，由 Hölder 不等式，我们有

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C(\Omega) \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{L^p}.$$

由此容易得到，对于任何 $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$，我们有

$$|f|_{m,p} \leqslant C(\Omega, m) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f|_{0,p}.$$

3.4.6 注 对于我们的论题最有意义的情形是 $p = 2$ 的情形. 在此情形，我们记

$$H_{m,2}(\Omega) = H_m(\Omega) \text{ 和 } \mathring{H}_{m,2}(\Omega) = \mathring{H}_m(\Omega),$$
$$|f|_{m,2} = |f|_m.$$

自然，范数 $|f|_m$ 由纯量积

$$[f, g]_m = [f, g] = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{j=1}^{q} \int_\Omega D^\alpha f_j(x) \overline{D^\alpha g_j(x)} dx$$

而得来. 此外，$H_m(\Omega)$ 和 $\mathring{H}_m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 这些空间比一般的空间 $H_{m,p}(\Omega)$ 稍微容易处理一些，其理由是对于它们 Plancherel 定理成立. 若 $m=0$，则 $H_0(\Omega)=L^2(\Omega)$，并且我们用 $\langle f, g\rangle$ 代替 $[f, g]_0$.

3.4.7 命题 令 $f\in \mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n)$，并令 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换，则存在常数 $c_1, c_2>0$，使得

$$c_1\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\leqslant |f|_m^2$$
$$\leqslant c_2\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

证明 只需对于 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n, q)$ 证明这个不等式即可，因为空间 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n, q)$ 在 $\mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠. 容易知道，存在常数 $c_1, c_2>0$，满足

3.4.8 $$c_1(1+|\xi|^2)^m\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\leqslant c_2(1+|\xi|^2)^m.$$

然而，若 $f=(f_1, \cdots, f_q)$，则我们有

$$|f|_m^2=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j=1}^q\int|D^\alpha f_j(x)|^2dx$$
$$=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j=1}^q\int|\widehat{D^\alpha f_j}(\xi)|^2d\xi \text{（定理 3.2.8）}$$
$$=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j=1}^q\int|\xi^\alpha|^2|\hat{f}_j(\xi)|^2d\xi,$$

因而从(3.4.8)即得本命题.

3.4.9 定理 我们有

$$\mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n)=H_m(\boldsymbol{R}^n)$$
$$=\left\{f\in L^2(\boldsymbol{R}^n, q)\,\Big|\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2d\xi<\infty\right\}.$$

证明 令 $\varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n, 1)$ 满足：当 $|x|\leqslant 1$ 时 $\varphi(x)=1$，并且 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. 令 $f\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$，并令

$$f_\nu(x)=\varphi(x/\nu)f(x),$$

则 f_ν 有紧支集．并且，

$$D^\alpha f_\nu = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi_\nu D^{\alpha-\beta} f, \quad \varphi_\nu(x) = \varphi(x/\nu).$$

显然，当 $\nu \to \infty$ 时 $D^\beta \varphi_\nu$ 是有界的．并且，若 $|\beta| \geqslant 1$，在每一点处 $D^\beta \varphi_\nu \to 0$；若 $\beta = 0$，在每一点处 $D^\beta \varphi_\nu \to 1$．因而在 $L^2(\boldsymbol{R}^n, q)$ 中 $D^\alpha f_\nu \to D^\alpha f$，所以在 $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ 中 $f_\nu \to f$．因为 $f_\nu \in \mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n)$，我们立即得到 $\mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n) = H_m(\boldsymbol{R}^n)$．然而，由命题 3.4.7，我们有

$$\mathring{H}_m(\boldsymbol{R}^n) \subset \left\{ f \in L^2(\boldsymbol{R}^n, q) \,\middle|\, \int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

反之，若对于某个 $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n, q)$，我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

则

$$(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R}^n, q).$$

因而在 $\mathscr{S}$ 中存在一个函数列 $\{\hat{g}_\nu\}$，使得在 $L^2(\boldsymbol{R}^n, q)$ 中

$$\hat{g}_\nu(\xi) \to (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi).$$

但是

$$\hat{g}_\nu / (1 + |\xi|^2)^{m/2} \in \mathscr{S},$$

因而由反演公式 3.2.2，存在 $h_\nu \in \mathscr{S}$，它的 Fourier 变换为 $\hat{g}_\nu / (1 + |\xi|^2)^{m/2}$．因此 $h_\nu \in H_m(\boldsymbol{R}^n)$．因为当 $\mu, \nu \to \infty$ 时[1]

$$\int (1 + |\xi|^2)^m |\hat{h}_\nu(\xi) - \hat{h}_\mu(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int |\hat{g}_\nu(\xi) - \hat{g}_\mu(\xi)|^2 d\xi \to 0,$$

因此从命题 3.4.7 即得 h_ν 在 $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ 中收敛．显然，在 $L^2(\boldsymbol{R}^n, q)$ 中 $h_\nu \to f$，因而就得到了我们的定理．

3.4.10 定义 我们已经看到，存在一个从 $H_{m,p}(\Omega)$ 到 $H_{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega, q)$ 中的内射映射．给定 $f \in L^p(\Omega, q)$，我们说 f 在 L^p 中直到 m 阶强可微的，如果对于任何 $\Omega' \Subset \Omega$，$f|\Omega'$ 在 $H_{m,p}(\Omega')$ 在上

---

1) 原文将 $\int |\hat{g}_\nu(\xi) - \hat{g}_\mu(\xi)|^2 d\xi$ 误为 $\int |\hat{g}_\nu(\xi) - \hat{g}_\mu(\xi)| d\xi$．——译者注

述内射映射下的像中．若 $p=2$，我们简单地说 f 是强可微的．

3.4.11 定理 令 φ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中具有紧支集的 C^∞ 函数，$\varphi\geqslant 0$，$\operatorname{supp}(\varphi)\subset\{x\mid |x|<1\}$，并且 $\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)dx=1$．令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$．令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并且，对于 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $f\in L^p(\Omega)$，令

$$(\varphi_\varepsilon*f)(x)=\int_\Omega\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy.$$

则：

(a) 对于任何 $f\in L^p(\Omega)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，在 $L^p(\Omega)$ 中 $\varphi_\varepsilon*f\to f$.

(b) 若 $f\in\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ 则对于 $|\alpha|\leqslant m$，有

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon*f)=\varphi_\varepsilon*D^\alpha f.$$

证明 当 $x\notin\Omega$ 时，我们令 $f(x)=0$，这样我们就把 f 开拓到 $\boldsymbol{R}^n$ 上．我们有

$$(\varphi_\varepsilon*f-f)(x)=\int\varphi_\varepsilon(x-y)(f(y)-f(x))dy$$

$$=\int_{|y|\leqslant\varepsilon}\varphi_\varepsilon(-y)(f(y+x)-f(x))dy.$$

由 Hölder 不等式，如果 $p>1$，我们就有

$$|(\varphi_\varepsilon*f-f)(x)|^p\leqslant\left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|\varphi_\varepsilon(y)|^{p'}dy\right)^{p/p'}$$

$$\cdot\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|f(y+x)-f(y)|^pdy,$$

其中 p' 由 $1/p+1/p'=1$ 所定义．[如果 $p=1$，则右端的第个因子用 $\sup|\varphi_\varepsilon(y)|=\varepsilon^{-n}\sup|\varphi(y)|$ 所代替]．在 R^n 上关于 x 积分，并取其 p 次根，我们就得到

$$\|\varphi_\varepsilon*f-f\|_{L^p}\leqslant\varepsilon^{-n/p}\|\varphi\|_{L^{p'}}\left\{\int_{|y|\leqslant\varepsilon}dy\int|f(x+y)\right.$$

$$\left.-f(x)|^pdx\right\}^{1/p}$$

（其中，若 $p=1$，则 $\|\varphi\|_{L^{p'}}=\sup|\varphi(y)|$）．这就给出

$\|\varphi_\varepsilon*f-f\|_{L^p}$

$$\leqslant \varepsilon^{-n/p}\left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon} dy\right)^{1/p'} \|\varphi\|_{L^{p'}} \sup_{|y|\leqslant\varepsilon} \left(\int |f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= C\|\varphi\|_{L^{p'}} \sup_{|y|\leqslant\varepsilon} \left(\int |f(x+y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

然而，当 $\varepsilon \to 0$ 时最后一项 $\to 0$；当 f 为具有紧支集的连续函数时这是显然的，因而对于任何 $f \in L^p(\Omega)$ 这也成立，因为具有紧支集的连续函数集合是稠的．这就证明了 (a)．

为了证明 (b)，令 $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$，并令 $\{f_\nu\}$ 是 $C_0^\infty(\Omega, q)$ 的一列元素，它在 $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ 中收敛于 f．则

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_\Omega D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \int_{R^n} (D^\alpha \varphi_\varepsilon)(x-y) f_\nu(y) dy$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \int_{R^n} \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f_\nu(y) dy$$

$$= \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y) dy$$

$$= (\varphi_\varepsilon * (D^\alpha f))(x).$$

3.4.12 定理 若 $f \in H_{m,p}(\Omega)$，并且，对于 $|\alpha| \leqslant m$，$D^\alpha f$ 在 L^p 中直到 m' 阶强可微，则 f 在 L^p 中直到 $m+m'$ 阶强可微．

证明 通过在 f 上乘以一个具有紧支集的适当的 C^∞ 函数，我们不妨假设 f 有紧支集．如果 φ_ε 如定理 3.4.11 中所定义，则 $\varphi_\varepsilon * f$ 是一个 C^∞ 函数．并且，由定理 3.4.11，(b)，对于 $|\alpha| \leqslant m$ 我们有

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) = \varphi_\varepsilon * (D^\alpha f).$$

然而，因为 $D^\alpha f \in \mathring{H}_{m',p}(\Omega)$，因此对于任何 α, β：$|\alpha| \leqslant m$，$|\beta| \leqslant m'$，我们有

$$D^{\alpha+\beta}(\varphi_\varepsilon * f) = D^\beta(\varphi_\varepsilon * D^\alpha f) = \varphi_\varepsilon * D^\beta(D^\alpha f)$$

（定理 3.4.11，(b)）．

当 $\varepsilon \to 0$ 时，它在 $L^p(\Omega, q)$ 中收敛（定理 3.4.11，(a)），由此即得 $f \in H_{m+m',p}(\Omega)$．

§3.5. Rellich 引理和 Sobolev 引理

3.5.1 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，并令 φ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中具有紧支集的一个 C^∞ 函数，满足

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad \int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x) dx = 1.$$

令

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon).$$

令 $p \geqslant 1$，并令当 $p > 1$ 时 p' 由 $1/p' + 1/p = 1$ 所定义. 则对于任何 $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)(m \geqslant 1)$，我们有

$$|\varphi_\varepsilon * f - f|_{m-1,p}^{\boldsymbol{R}^n} \leqslant A\varepsilon \|\varphi\|_{L^{p'}} |f|_{m,p},$$

其中 A 是一个只依赖于 Ω, m 和 p 的常数. 当 $p = 1$ 时，$\|\varphi\|_{L^{p'}}$ 表示 $\sup|\varphi(x)|$.

证明 令 f 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个 C^∞ 函数，$\operatorname{supp}(f) \subset \Omega$. 对于 x, $y \in \boldsymbol{R}^n$，我们有

$$f(x+y) - f(x) = \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + ty) dt.$$

因而，若

$$g_y(x) = f(x+y) - f(x),$$

则 Hölder 不等式给出

$$|g_y(x)|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + ty) \right|^p dt,$$

以致

$$\begin{aligned} \|g_y\|_{L^p}^p &\leqslant n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_0^1 dt \int_{\boldsymbol{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + ty) \right|^p dx \\ &= n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_{\boldsymbol{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right|^p dx \\ &\leqslant n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p |f|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

因而，对于 $|y| \leqslant \varepsilon$，我们有

3.5.2 $$\|g_y\|_{L^p} \leqslant n\varepsilon |f|_{1,p}.$$

因为

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{R^n} \varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy,$$

以及

$$\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\},$$

因此当 $p > 1$ 时，就有

$$\begin{aligned} &|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \\ &\leqslant \left(\int |\varphi_\varepsilon(y)|^{p'} dy\right)^{1/p'} \left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon} |f(x+y) - f(x)|^p dy\right)^{1/p} \\ &= \varepsilon^{-n/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon} |g_y(x)|^p dy\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

并且，当 $p = 1$ 时这个不等式显然也是对的。因而，由 (3.5.2)，我们有

$$\begin{aligned} &\left(\int_{R^n} |\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\qquad \leqslant \varepsilon^{-n/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} n\varepsilon |f|_{1,p} \left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon} dy\right)^{1/p} \\ &\qquad = A\varepsilon \|\varphi\|_{L^{p'}} |f|_{1,p}, \end{aligned}$$

即

$$|\varphi_\varepsilon * f - f|_{0,p}^{R^n} \leqslant A\varepsilon \|\varphi\|_{L^{p'}} |f|_{1,p}.$$

把这个不等式应用于诸导数 $D^\alpha f(|\alpha| \leqslant m-1)$，并且利用 $C_0^\infty(\Omega, q)$ 在 $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$ 中稠这一事实，我们就得到所需要的不等式.

3.5.3 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，k 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个具有紧支集的连续函数，则对于 $f \in L^p(\Omega)$，由

$$(Kf)(x) = \int_\Omega k(x-y) f(y) dy$$

所定义的函数 Kf 属于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$，并且，算子

$$K: L^p(\Omega) \to L^p(\boldsymbol{R}^n)$$

是全连续的 $(p \geqslant 1)$.

证明 第一个结论是显然的，因为对于 $f \in L^p(\Omega)$，Kf 是连续

的，并且其支集在紧集

$$S=\{x+y\,|\,x\in\bar{\Omega},\ \text{并且}\ y\in\operatorname{supp}(k)\}$$

之中．因而，给定 $L^p(\Omega)$ 中满足 $\|f_\nu\|_{L^p}\leqslant 1$ 的一个元素列 $\{f_\nu\}$，只需证明存在一个子序列 $\{\nu_r\}$，使得 $\{Kf_{\nu_r}\}$ 在 S 上一致收敛即可．由 Ascoli 定理，对于我们的目的而言，只需证明族 $\{Kf\,|\,\|f\|_{L^p}\leqslant 1\}$ 是有界的和等度连续的．

对于 $\delta>0$，令

$$\eta(\delta)=\sup_{|a-b|\leqslant\delta}|k(a)-k(b)|,$$

则，由 Hölder 不等式，我们有

$$|Kf(x)|\leqslant\|k\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}\leqslant\|k\|_{L^{p'}},$$

以及

$$\begin{aligned}|Kf(x)-Kf(y)|&\leqslant\eta(|x-y|)\int_\Omega|f(t)|\,dt\\&\leqslant C\eta(|x-y|)\|f\|_{L^p}\end{aligned}$$

（因为 Ω 是有界的）．这就证明了命题．

3.5.4 Rellich 引理 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，并令 $0\leqslant m'<m$，则自然的内射映射

$$i:\mathring{H}_{m,p}(\Omega)\to\mathring{H}_{m',p}(\Omega)$$

是全连续的．

证明 对于任何连续算子

$$T:\mathring{H}_{m,p}(\Omega)\to\mathring{H}_{m',p}(\boldsymbol{R}^n),$$

令

$$\|T\|=\sup_{f\neq 0}\left(\frac{|Tf|^{\boldsymbol{R}^n}_{m',p}}{|f|^{\Omega}_{m,p}}\right),$$

并令 j 是 i 与等距映射 $\mathring{H}_{m',p}(\Omega)\to\mathring{H}_{m',p}(\boldsymbol{R}^n)$ 的复合．令 T_ε 是算子 $f\mapsto\varphi_\varepsilon*f$[1]，其中 φ_ε 如命题 3.5.1 中所述．则由命题 3.5.1，有

$$\|T_\varepsilon-j\|\to 0,\ \text{当}\ \varepsilon\to 0\ \text{时}.$$

此外，由命题 3.5.3，每个 T_ε 是全连续的．因为全连续算子的一致极限仍是全连续的(这是一个容易证明的事实)，因而定理即得证．

1) 原文误为 $f\mapsto\varphi*f$．——译者注

3.5.5 命题 当 $p = 2$ 时，可以利用 Plancherel 定理更简单地证明上面的引理.

证明 令 $f \in \mathring{H}_m(\Omega)$, $|f|_m \leqslant 1$. 对于复的 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{C}^n$, 考虑函数

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_\Omega f(x) e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} dx.$$

由 Schwarz 不等式，若 ξ 位于 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个紧子集 S 中，则

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant C(S)|f|_m,$$

因而 $\{\hat{f}(\xi)\}_{\xi \in S}$ 是一致有界的. 此外，$\hat{f}$ 在 $\boldsymbol{C}^n$ 上显然是全纯的. 因而，由定理 1.1.3′，序列 $\{\hat{f}_\nu\}$ 包含一个子序列 $\{\hat{f}_{\nu_r}\}$，它在 $\boldsymbol{C}^n$ 的任何紧子集上一致收敛. 我们断言，相应的序列 $\{f_{\nu_r}\}$ 在 $H_{m-1}(\Omega)$ 中收敛. 令 $\varepsilon > 0$ 是给定的，并选取 $M > 0$，使得对于 $|\xi| \geqslant M$，有 $1 + |\xi|^2 > 1/\varepsilon$. 则，由命题 3.4.7 得到

$$\begin{aligned}
&|f_{\nu_r} - f_{\nu_s}|_{m-1}^2 \\
&\quad \leqslant c_2 \int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-1} |\hat{f}_{\nu_r} - \hat{f}_{\nu_s}|^2 d\xi \\
&\quad \leqslant c_2 \varepsilon \int_{|\xi| > M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_{\nu_r} - \hat{f}_{\nu_s}|^2 d\xi \\
&\qquad + A(\varepsilon) \int_{|\xi| \leqslant M} |\hat{f}_{\nu_r} - \hat{f}_{\nu_s}|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

其中 $A(\varepsilon)$ 是一个只依赖于 ε 和 m 的常数. 因为 $\{\hat{f}_{\nu_r}\}$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的任何紧子集上一致收敛，因此当 $r, s \to \infty$ 时，最后一个积分趋于0，这就给出

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{r,s\to\infty}} |f_{\nu_r} - f_{\nu_s}|_{m-1}^2 &\leqslant c_2 \varepsilon \overline{\lim_{r,s\to\infty}} \int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_{\nu_r} - \hat{f}_{\nu_s}|^2 d\xi \\
&\leqslant c_3 \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了命题.

3.5.6 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，m 是一个 $\geqslant 0$ 的整数，则对于每个 $M > 0$，存在一个只依赖于 M，Ω 和 m 的常数 $A > 0$，使得对于所有 $f \in \mathring{H}_m(\Omega)$，我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant A\int_{|\xi|\geqslant M}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

证明 如果结论不成立，则存在 Ω 中具有紧支集的一列 C^∞ 函数 $\{f_\nu\}_{\nu\geqslant 1}$，使得

$$\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi=1,$$

$$\int_{|\xi|\geqslant M}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi\to 0 \text{ 当 } \nu\to\infty \text{时.}$$

如果我们还令 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是复的，则 C^n 上的全纯函数列

$$\hat{f}_\nu(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_\Omega f_\nu(x)e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx,\quad \nu=1,2,\cdots$$

在 C^n 的任何紧子集上是一致有界的，因而我们不妨假设（定理 1.1.3′），$\hat{f}_\nu$ 在 C^n 的（特别，R^n 的）任何紧子集上一致收敛于某个全纯函数 g. 然而由我们上面的假设，有

$$\int_{M\leqslant|\xi|\leqslant M+1}(1+|\xi|^2)^m|g(\xi)|^2d\xi$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\int_{M\leqslant|\xi|\leqslant M+1}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi=0.$$

因而，对于满足 $M\leqslant|\xi|\leqslant M+1$ 的实 ξ，$g(\xi)=0$. 因为 g 在 C^n 中是全纯的，因此这就蕴涵着 $g\equiv 0$，因而 $\hat{f}_\nu$ 在 C^n 的任何紧子集上一致收敛于 0. 特别，

$$\int_{|\xi|\leqslant M}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi\to 0 \text{ 当 } \nu\to\infty \text{ 时.}$$

因为由假设

$$\int_{|\xi|\geqslant M}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi\to 0,$$

因此即得

$$\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}_\nu(\xi)|^2d\xi\to 0.$$

这是一个矛盾.

3.5.7 注 利用 Plancherel 定理，可以把 $p=2$ 时的 Poincaré 不等式 3.4.5 改写如下：存在一个常数 $C(\Omega,m)$，使得对于所有 $f\in$

$\mathring{H}_m(\Omega)$，我们有

$$\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant C(\Omega,m)\int_{R^n}|\xi|^{2m}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

这样，可以把命题 3.5.6 看成为 Poincaré 不等式的一个较精确的形式。

此外，在不等式 3.5.6 中求得最好可能的常数是可能的。这与 Fourier 分析中颇有兴趣的一些问题有关；参阅 Fuchs [1964]。

3.5.8 命题 （$\boldsymbol{R}^n$ 的极坐标）。令 $\boldsymbol{R}^+=\{t\in\boldsymbol{R}|t>0\}$，$S^{n-1}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 $n-1$ 维单位球面（例 2.5.6）。令

$$\vartheta:\boldsymbol{R}^+\times S^{n-1}\to\boldsymbol{R}^n-\{0\}$$

是映射 $(t,x)\longmapsto tx$。则在 S^{n-1} 上存在一个 $(n-1)$-形式 ω，使得

$$\vartheta^*(dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n)=t^{n-1}dt\wedge\omega.$$

此外，

$$\int_{S^{n-1}}\omega\neq 0.$$

证明 若 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的坐标函数在 S^{n-1} 上的限制，则我们可以取

$$\omega=\sum_{k=1}^{n}x_k dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_k}\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

其中，在项 dx_k 上的^意味着该项不出现。我们从

$$\int_U dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n>0$$

这一事实即得

$$\int_{S^{n-1}}\omega\neq 0$$

这一事实，其中

$$U=\vartheta(I\times S^{n-1}),\quad I=\left\{t\,\middle|\,\frac{1}{2}<t<1\right\}.$$

3.5.9 Sobolev **引理** 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并令 $m > n/p$，则对于每个紧集 $K\subset\Omega$，存在一个常数 $C>0$，使得对于每个 $f\in C^\infty(\Omega)$，$\mathrm{supp}\,(f)\subset K$，我们有

$$\sup_{x\in K}|f(x)|\leqslant C|f|_{m,p}.$$

证明 我们不妨假设 $\Omega=\boldsymbol{R}^n$。此外，给定 K，我们可以找到一个紧集 $L\subset\boldsymbol{R}^n$，使得对于任何 $y\in K$，函数

$$g=g_y: x\longmapsto f(x+y)$$

的支集包含在 L 中。这样，只需证明对于任何 $f\in C^\infty$，$\mathrm{supp}(f)\subset L$，我们有

$$|f(0)|\leqslant C|f|_{m,p}.$$

令 $\vartheta:\boldsymbol{R}^+\times S^{n-1}\to\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ 是在命题 3.5.8 中所定义的映射。

若 $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，令 $g=f\circ\vartheta$，则可以用下述方法得到偏导数 $\partial^m g(t,x)/\partial t^m$。存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上 m 次齐次多项式 q_α，使得

3.5.10
$$\frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}=\sum_{|\alpha|=m}q_\alpha\left(\frac{y}{\|y\|}\right)D^\alpha f(y),\quad y=\vartheta(t,x)=tx;$$

特别，诸函数 $q_\alpha(y/\|y\|)$ 是有界的。若 M 是一个充分大的常数，并且 $x\in S^{n-1}$，则我们有

$$\begin{aligned}f(0)&=-\int_0^M\frac{\partial}{\partial t}f(tx)dt\\&=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_0^M t^{m-1}\frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}dt.\end{aligned}$$

用 ω 相乘，并在 S^{n-1} 上积分，我们得到

$$f(0)\int_{S^{n-1}}\omega=C_m\int_{S^{n-1}}\int_0^M\frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}t^{m-1}dt\wedge\omega,$$

因为

$$\int_{S^{n-1}}\omega\neq0,$$

这就给出了

3.5.11
$$f(0)=C'_m\int_0^M\int_{S^{n-1}}t^{m-n}\frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}t^{n-1}dt\wedge\omega$$

$$= C'_m \int_{\|y\| \leqslant M} t^{m-n} g_m(y) dy, \quad t = \|y\|,$$

(由命题 3.5.8)，其中 $g_m(y)$ 由 (3.5.10) 所给出．当 $p > 1$ 时，Hölder 不等式给出了

$$|f(0)| \leqslant C' \left(\int_{\|y\| \leqslant M} t^{(m-n)p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_{\|y\| \leqslant M} |g_m(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$．因为 $m > n/p$, 我们即有 $(m-n)p' + n - 1 > -1$, 因而

$$\int_{\|y\| \leqslant M} t^{(m-n)p'} dy = \int_0^M t^{(m-n)p'+n-1} dt \int_{S^{n-1}} \omega$$
$$= C'' < \infty.$$

此外，由(3.5.10),

$$\int_{\|y\| \leqslant M} |g_m(y)|^p dy \leqslant \text{const} \cdot |f|_{m,p}^p,$$

因而，正如所期望的那样，我们得到

$$|f(0)| \leqslant C |f|_{m,p}.$$

当 $p = 1$, $m \geqslant n$ 时，从 (3.5.11) 就得到了所要求的不等式。

3.5.12 推论 若 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，K 是 Ω 的一个紧子集，则对于任何 $f \in C^\infty(\Omega, q)$, 当 $m > n/p$ 时，我们有

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leqslant C |f|_{m,p}.$$

我们只需将引理 3.5.9 应用于 φf 的诸分量即可，这里 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 当 $x \in K$ 时 $\varphi(x) = 1$.

3.5.13 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开集，$m > n/p$, 则任何 $f \in H_{m,p}(\Omega)$ 几乎处处等于一个具有小于、等于 $m - [n/p] - 1$ 阶连续导数的函数；这里 $[X]$ 是不大于 X 的最大整数．

证明 通过在 f 上乘以一个具有紧支集的适当的函数，我们不妨假设 $f \in \mathring{H}_{m,p}(\Omega)$, 以及 Ω 是有界的．令

$$f_\nu \in C_0^\infty(\Omega, q), \quad |f_\nu - f|_{m,p} \to 0.$$

由推论 3.5.12，若 K 在 Ω 中是紧的，则存在一个 $C > 0$, 使得对于 $|\alpha| < m - (n/p)$, 有

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha(f_\nu-f_\mu)(x)|\leqslant C|D^\alpha(f_\nu-f_\mu)|_{m-|\alpha|,p}$$

$$\leqslant C|f_\nu-f_\mu|_{m,p}\to 0\quad \text{当}\quad \nu,\mu\to\infty\text{时}.$$

因而，对于 $|\alpha|<m-(n/p)$, $D^\alpha f_\nu$ 在 Ω 的任何紧子集上一致收敛. 命题即得证.

3.5.14 命题 当 $p=1$ 或 $p=2$ 时，可以较简单地证明引理 3.5.9.

$p=1$ 的情形，若 M 充分大，则我们有

$$f(x)=\int_{-M}^{x_1}\cdots\int_{-M}^{x_n}\frac{\partial^n f(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1\cdots\partial t_n}dt_1\cdots dt_n,$$

因而

$$|f(x)|\leqslant|f|_{n,1}\leqslant|f|_{m,1},\quad \text{若}\quad m\geqslant n.$$

事实上，若 $m\geqslant n$ 且 $p\geqslant 1$，则 Hölder 不等式给出了

3.5.15 $$|f(x)|\leqslant C|f|_{m,p}.$$

通常，这个不等式已经够用了.

$p=2$ 的情形. 我们有

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{i(x,\xi)}(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{f}(\xi)$$

$$\times(1+|\xi|^2)^{+m/2}d\xi;$$

因为对于 $m>n/2$，有

$$\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-m}d\xi<\infty,$$

因而 Schwarz 不等式即给出了

$$|f(x)|^2\leqslant C\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-m}d\xi\int_{R^n}|\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^m d\xi$$

$$\leqslant C'|f|_m^2$$

(由命题 3.4.7).

有关 $\mathring{H}_m(\Omega)$ 中范数的一个有用的注记是下述命题:

3.5.16 命题 对于任何 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $C(\varepsilon)>0$，使得

$$|f|_{m-1}^2\leqslant\varepsilon|f|_m^2+C(\varepsilon)|f|_0^2\quad \text{对于所有}\quad f\in\mathring{H}_m(\Omega).$$

证明 只需对于所有 $f\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 证明这个命题即可. 由命题 3.4.7, 有

$$|f|_{m-1}^2\leqslant c_2\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

给定 $\varepsilon>0$, 存在一个常数 $C(\varepsilon)>0$, 使得对于所有 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$, 有

$$(1+|\xi|^2)^{m-1}\leqslant\varepsilon c_2^{-1}(1+|\xi|^2)^m+C(\varepsilon).$$

因而, 有

$$|f|_{m-1}^2\leqslant\varepsilon\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2d\xi$$
$$+C(\varepsilon)\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi,$$

再由命题 3.4.7 即完成了证明.

3.5.17 注 命题 3.5.16 等价于下述事实: 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 $C(\varepsilon)>0$, 使得对于所有 $f\in\mathring{H}_m(\Omega)$, 有

$$|f|_{m-1}\leqslant\varepsilon|f|_m+C(\varepsilon)|f|_0.$$

当我们用 $H_{m,p}(\Omega)$ 代替 $\mathring{H}_{m,p}(\Omega)$, 并且 Ω 的边界充分光滑时, Rellich 引理仍然成立(参阅 Rellich [1930]).

Sobolev 引理有不少证明. Sobolev [1938] 获得了一些很精确的不等式. 然而, 他的大多数证明远较我们在这里给出的证明复杂.

§3.6. Gårding 不等式和 Friedrichs 不等式

在本节中, 我们将考虑在一个开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的从 ϑ_r 到 ϑ_r 的微分算子. 我们假设所给出的算子为如下形式:

$$(Pu)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x),\quad u\in C^\infty(\Omega,r).$$

我们立即得到, 若 $v=(v_1,\cdots,v_r)\in\boldsymbol{C}^r$, $x_0\in\Omega$ 和 $f\in\boldsymbol{m}_{x_0}$, 则

$$P(f^mv)(x_0)=m!\sum_{|\alpha|=m}\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}a_\alpha(x_0)v,$$

其中

$$\xi_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

若我们令

$$p_P(x,\xi) = p(x,\xi) = p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha a_\alpha(x),$$

$$x \in \Omega,\ \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

则从上面的说明和定义 3.3.14 即得，P 是椭圆的，当且仅当对于任何 $\xi \neq 0$，$\xi \in \boldsymbol{R}^n$ 和 $x \in \Omega$，映射

$$p(x,\xi): \boldsymbol{C}^r \to \boldsymbol{C}^s$$

是内射的．这个函数 p 称为算子 P 的特征多项式．

在 $r = s$ 的情形中，考虑一类更特殊的算子是有益的．

3.6.1 定义 Ω 上的一个从 ϑ_r 到其自身的 m 阶线性微分算子 P 称为(一致)强椭圆的，如果存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $\xi \in \boldsymbol{R}^n$，$x \in \Omega$ 和 $v \in \boldsymbol{C}^r$，我们有

$$\operatorname{Re}\ (p(x,\xi)v, v) \geqslant C|\xi|^m |v|^2.$$

若 $n > 1$，则任何强椭圆算子都是偶数阶的．事实上，若 $x \in \Omega$ 和 $v \neq 0$，则函数

$$Q(\xi) = \operatorname{Re}\ (p(x,\xi)v, v)$$

是一个 m ($=P$ 的阶)次齐次多项式．显然，对于几乎所有的 $a, b \in \boldsymbol{R}^n$，实变量 λ 的多项式 $Q(a+\lambda b)$ 关于 λ 是 m 次的，因而若 m 是奇数，则 $Q(a+\lambda b)$ 有实零点．若 $n>1$，则我们可以选取 a，b，使得对于所有 $\lambda \in \boldsymbol{R}$，$a + \lambda b \neq 0$，因而 Q 有一个实的非平凡零点．

令 P_1 是一个从 ϑ_r 到 ϑ_s 的 m_1 阶的线性微分算子，P_2 是一个从 ϑ_s 到 ϑ_t 的 m_2 阶的线性微分算子，则

$$P_2 \circ P_1: C^\infty(\Omega, r) \to C^\infty(\Omega, t)$$

是一个线性微分算子．容易验证，这个算子的阶 $\leqslant m_1 + m_2$．

若

$$p_1(x,\xi): \boldsymbol{C}^r \to \boldsymbol{C}^s,\ \ p_2(x,\xi): \boldsymbol{C}^s \to \boldsymbol{C}^t$$

分别表示 P_1，P_2 的特征多项式，且若 $P_2 \circ P_1$ 的阶数为 $m_1 + m_2$，则 $P_2 \circ P_1$ 的特征多项式为 $p_2 \circ p_1$．而 $P_2 \circ P_1$ 的阶为 $m_1 + m_2$，当且仅当

$p_2 \circ p_1 \neq 0$. 特别，若 P_1, P_2 是椭圆的，则对于 $\xi \neq 0$, $p_2 \circ p_1 : \mathbf{C}^r \to \mathbf{C}^t$ 显然是内射的，由此即得 $P_2 \circ P_1$ 仍然是椭圆的. 此外，若 P^* 表示 P 的形式伴随算子(命题 3.3.17)，则其特征多项式由

$$p^*(x,\xi) = (-1)^{m\,t}\overline{p(x,\xi)},$$

给出 ($p = P$ 的特征多项式).

从这些说明我们直接推得下述推论:

3.6.2 推论 若 P 是 Ω 上的一个从 ϑ_r 到 ϑ_t 的椭圆算子，则对于任何 $\Omega' \Subset \Omega$, 算子 $(-1)^m P^* \circ P$ 是 Ω' 上从 ϑ_r 到其自身的偶数阶的一致强椭圆算子.

证明 若

$$L = (-1)^m P^* \circ P,$$

并且 p_L 是它的特征多项式，则

$$p_L = (-1)^m p^* \circ p,$$

以致对于 $v \in \mathbf{C}^r$, 有

$$(p_L(x,\xi)v, v) = (p(x,\xi)v, p(x,\xi)v) = \|p(x,\xi)v\|^2.$$

因为 P 是椭圆的，当 $v \neq 0, \xi \neq 0$ 时 $p(x,\xi)v \neq 0$, 因而若 $x \in \Omega' \Subset \Omega$ 和 $|\xi| = 1, |v| = 1$, 则 $\|p(x,\xi)v\|^2$ 是下有界的. 由齐次性即得

$$(p_L(x,\xi)v, v) \geqslant C|\xi|^{2m}|v|^2.$$

3.6.3 Gårding 不等式 令 P 是 Ω 上从 ϑ_r 到其自身的 $2m$ (偶)阶的一个一致椭圆算子，则对于 Ω 的任何相对紧开子集 Ω', 存在常数 $C > 0$ 和 $B > 0$, 使得对于所有 $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$, 有

$$(-1)^m \mathrm{Re}\,\langle Pu, u\rangle \geqslant C|u|_m^2 - B|u|_0^2.$$

证明 分三步证明此定理.

第I步. 令 P 由

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha D^\alpha u(x)$$

所给出，其中诸 a_α 是常数矩阵，(即，P 是一个具有常系数的算子). Plancherel 定理给出

$$\langle Pu, u\rangle = \langle \widehat{Pu}, \hat{u}\rangle.$$

但是

$$\widehat{Pu} = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha \widehat{D^\alpha u}(\xi) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$$

$$= (-1)^m p(\xi)\hat{u}(\xi) + q(\xi)\hat{u}(\xi),$$

其中 p 是 P 的特征多项式，q 是一个次数 $\leqslant 2m-1$ 的多项式(系数为 $r\times r$ 复矩阵)．这样，

$$(-1)^m \mathrm{Re}\ \langle Pu, u\rangle$$

$$= \mathrm{Re}\int_{R^n} (p(\xi)\hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi))d\xi$$

$$+ (-1)^m \mathrm{Re}\int_{R^n} (q(\xi)\hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi))d\xi$$

$$\geqslant c_1\int_{R^n} |\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$- c_2\int_{R^n} (1+|\xi|)^{2m-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

其中 c_1，$c_2>0$；这里我们已经用了下面两个事实：由于 P 是一致强椭圆的，所以存在 $c_1>0$，满足

$$\mathrm{Re}\ (p(\xi)v, v) \geqslant c_1|\xi|^{2m}|v|^2,\ v\in \boldsymbol{C}^r;$$

以及 q 的次数 $\leqslant 2m-1$．令 M 充分大，使得对于 $|\xi|\geqslant M$，有

$$c_1|\xi|^{2m} - c_2(1+|\xi|)^{2m-1} \geqslant \frac{1}{2}c_1(1+|\xi|^2)^m,$$

则$\left(\text{如果我们令 } c_3 = \frac{1}{2}c_1\right)$

$$(-1)^m \mathrm{Re}\ \langle Pu, u\rangle$$

$$\geqslant c_3\int_{|\xi|\geqslant M} (1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$- c_2\int_{|\xi|\leqslant M} (1+|\xi|)^{2m-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\geqslant c_3\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$- c_4 \int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

其中

$$c_4 = \sup_{|\xi| \leqslant M} \{c_3(1 + |\xi|^2)^m + c_2(1 + |\xi|)^{2m-1}\}.$$

由命题 3.4.7，存在一个常数 $c > 0$，使得

$$(-1)^m \mathrm{Re} \langle Pu, u \rangle \geqslant c|u|_m^2 - c_4|u|_0^2.$$

第II步. 这一步即为下述命题:

3.6.4 命题 对于任何 $x_0 \in \Omega$，存在 x_0 的一个邻域 U，使得对于所有 $u \in C_0^\infty(U, r)$，有

$$(-1)^m \mathrm{Re} \langle Pu, u \rangle \geqslant c|u|_m^2 - B|u|_0^2,$$

这里 c，$B > 0$ 是只依赖于 x_0 的常数.

证明 我们可以找到 Ω 上从 ϑ_r 到其自身的阶数 $\leqslant m$ 的线性微分算子 $Q_1, \cdots, Q_N$; $R_1, \cdots, R_N$，使得

$$P = \sum_{\nu=1}^{N} R_\nu^* \circ Q_\nu,$$

其中 R_ν^* 表示 R_ν 的形式伴随算子. 然而，我们可以写为

$$Q_\nu = Q_\nu^0 + Q_\nu', \quad R_\nu = R_\nu^0 + R_\nu',$$

其中 Q_ν^0，R_ν^0 是阶数$\leqslant m$ 的常系数算子，而 Q_ν'，R_ν' 的所有系数在 $x_0 \in \Omega$ 处为 0. 这样，我们有

$$\begin{aligned}\langle Pu, u \rangle = \langle P^0 u, u \rangle &+ \sum_\nu \{\langle Q_\nu' u, R_\nu^0 u \rangle + \langle Q_\nu^0 u, R_\nu' u \rangle \\ &+ \langle Q_\nu' u, R_\nu' u \rangle\},\end{aligned}$$

其中

$$P^0 = \sum_{\nu=1}^{N} (R_\nu^0)^* \circ Q_\nu^0.$$

因为 Q_ν'，R_ν' 的所有系数在 $x_0 \in \Omega$ 处为 0，并且 Q_ν'，R_ν' 的阶数$\leqslant m$，因此我们立即得到，对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 x_0 的一个邻域 U，使得对于所有 $u \in C_0^\infty(U, r)$，上面所述的等式中最后的和式的绝对值 $\leqslant \varepsilon |u|_m^2$.

把第 I 步的结果应用于 P^0，我们就得到，如果

$$(-1)^m \mathrm{Re}\ \langle P^0 u, u\rangle \geq c_0 |u|_m^2 - B|u|_0^2,$$

则

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu, u\rangle \geq (c_0 - \varepsilon)|u|_m^2 - B|u|_0^2,$$
$$u \in C_0^\infty(U, r).$$

第 III 步. 这一步是一般情形.

若 $\Omega' \Subset \Omega$，则由上面的命题 3.6.4，我们可以找到常数 $c > 0$，$B > 0$ 和 $\bar{\Omega}'$ 的一个有限覆盖 $U_1, \cdots, U_h$，使得

3.6.5 $$(-1)^m \mathrm{Re}\ \langle Pu, u\rangle \geq c|u|_m^2 - B|u|_0^2,$$

$$\text{对于 } u \in C_0^\infty(U_j, r),\ j = 1, \cdots, h.$$

令 $\eta_j \in C_0^\infty(U_j, 1)$，$0 \leq \eta_j \leq 1$，并且对于 $\overline{\Omega'}$ 的一个邻域中的所有 x，有 $\sum \eta_j^2(x) = 1$（由引理 1.2.7，这些 η_j 是存在的）.

我们注意，对于某个只依赖于诸 η_j 的适当的常数 $C > 0$，我们有

$$\left||\eta_j u|_m^2 - \sum_{|\alpha| \leq m} |\eta_j D^\alpha u|_0^2\right| \leq C|u|_{m-1}|u|_m$$

以及

$$\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u\rangle = \langle Lu, u\rangle,$$

其中 L 是一个阶数 $\leq 2m-1$ 的微分算子. 因而（把 L 写为 $\sum B_\mu^* \circ A_\mu$ 这样的形式，其中诸 A_μ 是阶数 $\leq m$ 的算子，诸 B_μ 是阶数 $\leq m-1$ 的算子），我们得到，存在 $C > 0$，使得

$$|\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u\rangle| \leq C|u|_m|u|_{m-1}.$$

由此即得，对于任何 $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$，有

$$c|u|_m^2 = c\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_0^2 = c\sum_{j=1}^h \sum_{|\alpha| \leq m} |\eta_j D^\alpha u|_0^2$$

$$\leq c\sum_{j=1}^h |\eta_j u|_m^2 + c\mathbf{C}|u|_m|u|_{m-1}$$

$$\leq \sum_{j=1}^h (-1)^m \mathrm{Re}\langle P(\eta_j u), \eta_j u\rangle + B'|u|_0^2 + C'|u|_m|u|_{m-1}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{h} (-1)^m \mathrm{Re}\,\langle \eta_j P u,\ \eta_j u\rangle + B'|u|_0^2 + C''|u|_m|u|_{m-1}$$

$$= (-1)^m \mathrm{Re}\,\langle Pu,\ u\rangle + B'|u|_0^2 + C''|u|_m|u|_{m-1}.$$

然而，若 $\delta > 0$，则对于任何两个复数 $w_1,\ w_2$，我们有

$$2|w_1 w_2| \leqslant \delta|w_1|^2 + \frac{1}{\delta}|w_2|^2.$$

因而，由命题 3.5.16 即得

$$2C''|u|_m|u|_{m-1} \leqslant \delta|u|_m^2 + \frac{(C'')^2}{\delta}|u|_{m-1}^2$$

$$\leqslant 2\delta|u|_m^2 + C(\delta)|u|_0^2.$$

若 $\delta \leqslant \frac{1}{2}c$，则对于一个适当的 $B_0 > 0$ 和所有 $u \in C_0^\infty(\Omega',\ r)$，有

$$\frac{1}{2}c|u|_m^2 \leqslant (-1)^m \mathrm{Re}\,\langle Pu,\ u\rangle + B_0|u|_0^2.$$

3.6.6 命题 若 P 是一个 $2m$ 阶的一致强椭圆算子，它是齐次的，并有常系数，即，

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u(x),$$

则还可把上面的 Gårding 不等式精确化一些. 即，对于任何 $\Omega \Subset \boldsymbol{R}^n$，对于所有 $u \in C_0^\infty(\Omega,\ r)$，我们有

$$(-1)^m \mathrm{Re}\langle Pu,\ u\rangle \geqslant c(\Omega)|u|_m^2.$$

证明 我们有[1)]

$$(-1)^m \mathrm{Re}\,\langle Pu,\ u\rangle = \mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n} (p(\xi)\hat{u}(\xi),\ \hat{u}(\xi))d\xi$$

$$\geqslant c\int_{\boldsymbol{R}^n} |\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

因而从不等式 3.4.5 和注 3.5.7 即得我们的论断.

3.6.7 命题 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并令 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，$k \geqslant 1$

---

1) 原文误为

$(-1)^m\langle Pu,\ u\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} (p(\xi)\hat{u}(\xi),\ \hat{u}(\xi))d\xi \geqslant c\int_{\boldsymbol{R}^n} |\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$. ——译者注

是一个整数，则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$，使得对于所有 $f\in C^\infty(\Omega)$，我们有

$$\sum_{|\alpha|=k}|\varphi^k D^\alpha f|_0^2\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|=k+1}|\varphi^{k+1}D^\alpha f|_0^2$$

$$+C(\varepsilon)\sum_{|\alpha|=k-1}|\varphi^{k-1}D^\alpha f|_0^2,$$

(φ^0 表示恒等于 1 的函数).

证明 只需证明：对于 $k\geqslant1$，$|\beta|=k$，存在 $C(\varepsilon)$，满足

$$|\varphi^k D^\beta f|_0^2\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|=k+1}|\varphi^{k+1}D^\alpha f|_0^2+C(\varepsilon)\sum_{|\alpha|=k-1}|\varphi^{k-1}D^\alpha f|_0^2.$$

我们写为 $\beta=\beta'+\gamma$，其中 $|\beta'|=k-1$，$|\gamma|=1$，则

$$\begin{aligned}|\varphi^k D^\beta f|_0^2&=\langle D^\beta f,\varphi^{2k}D^\beta f\rangle=-\langle D^{\beta'}f,D^\gamma(\varphi^{2k}D^\beta f)\rangle\\&=-\langle D^{\beta'}f,2k\varphi^{2k-1}D^\gamma\varphi D^\beta f\rangle-\langle D^{\beta'}f,\varphi^{2k}D^{\beta+\gamma}f\rangle\\&=-2k\langle D^\gamma\varphi\cdot\varphi^{k-1}D^{\beta'}f,\varphi^k D^\beta f\rangle\\&\quad-\langle\varphi^{k-1}D^{\beta'}f,\varphi^{k+1}D^{\beta+\gamma}f\rangle.\end{aligned}$$

利用

$$2|\langle u,v\rangle|\leqslant\delta|u|_0^2+\frac{1}{\delta}|v|_0^2\quad\text{对于所有 }\delta>0$$

这一事实，我们得到，对于任何 $\delta>0$，有

$$|\varphi^k D^\beta f|_0^2\leqslant\delta\{|\varphi^k D^\beta f|_0^2+|\varphi^{k+1}D^{\beta+\gamma}f|_0^2\}$$

$$+C_1(\delta)|\varphi^{k-1}D^{\beta'}f|_0^2,$$

由此容易得到我们所需要的不等式.

3.6.8 Friedrichs **不等式** 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界开集，P 是一个从 ϑ_r 到 ϑ_s 的 m 阶线性椭圆微分算子，它由

$$(Pu)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x),\quad u\in C^\infty(\Omega,r)$$

所给出. 令 k 是一个 $\geqslant0$ 的整数.

3.6.9 若诸 a_α 是常数，则存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega,r)$，有

$$|u|_{m+k}\leqslant C|Pu|_k.$$

3.6.10 对于任何 $x_0\in\Omega$，存在 x_0 的一个邻域 U 和一个常数 $C_1>$

0，使得对于所有 $u\in C_0^\infty(U, r)$，有

$$|u|_{m+k}\leqslant C_1|Pu|_k$$

（这里 P 不一定是常系数的）.

3.6.11 若 Ω' 是 Ω 中的一个相对紧集，则存在一个常数 $C_2>0$，使得对于所有 $u\in C^\infty(\Omega, r)$，有

$$|u|_{m+k}^{\Omega'}\leqslant C_2\{|Pu|_k^\Omega+|u|_0^\Omega\}.$$

特别，对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega', r)$，有

$$|u|_{m+k}\leqslant C_2\{|Pu|_k+|u|_0\}.$$

3.6.9 的证明 令 $p(x, \xi)=p(\xi)$ 是 P 的特征多项式. 因为 P 是椭圆的，所以对于 $|\xi|=1$，$v\in \boldsymbol{C}^r$，$|v|=1$，有 $p(\xi)v\neq 0$. 因而，由齐次性，存在 $\rho_1>0$，使得

$$\|p(\xi)v\|\geqslant \rho_1|\xi|^m|v|,\quad \xi\in \boldsymbol{R}^n,\quad v\in \boldsymbol{C}^r.$$

对于任何 $M>0$，我们有

$$\begin{aligned}|Pu|_k^2&\geqslant C'\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{Pu}(\xi)|^2d\xi\\&\geqslant C'\int_{|\xi|\geqslant M}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{Pu}(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}$$

然而

$$\widehat{Pu}(\xi)=p(\xi)\hat{u}(\xi)+q(\xi)\hat{u}(\xi),$$

其中 q 是一个次数 $\leqslant m-1$ 的多项式. 因为对于任何两个复数 a，b，我们有

$$|a+b|^2\geqslant\frac{1}{2}|a|^2-|b|^2,$$

因而推得：存在一个常数 $A>0$，使得

$$\begin{aligned}|\widehat{Pu}(\xi)|&\geqslant\frac{1}{2}|p(\xi)\hat{u}(\xi)|^2-A(1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{u}(\xi)|^2\\&\geqslant\frac{1}{2}\rho_1|\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2-A(1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{u}(\xi)|^2\\&\geqslant\rho_2(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2\quad 若\ |\xi|\geqslant M,\end{aligned}$$

其中 M 和 $\rho_2>0$ 是适当选取的常数. 这样选取了 M 后，我们有

$$|Pu|_k^2 \geqslant C'\rho_2 \int_{|\xi|\geqslant M} (1+|\xi|^2)^{m+k}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

因而从命题 3.4.7 和 3.5.6 即得(3.6.9)。

3.6.10 的证明 把 P 写为 $P = P^0 + P'$ 这样的形式，其中 P^0 有常系数，P' 的所有系数在 x_0 处等于 0 (P^0 和 P' 的阶为 m)。我们只需证明，若 $\varepsilon > 0$ 给定了，则存在 x_0 的一个邻域 U，使得对于 $u \in C_0^\infty(U, r)$，有

$$|P'u|_k \leqslant \varepsilon |u|_{m+k}.$$

考虑

$$D^\beta(bD^\alpha f),\ |\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant k,\ b \in C^\infty(\Omega),$$
$$f \in C_0^\infty(\Omega),\ b(x_0) = 0.$$

我们有[1]

$$D^\beta(bD^\alpha f) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma b D^{\alpha+\beta-\gamma} f.$$

通过分部积分，我们立即得到[2]

$$|D^\gamma b D^{\alpha+\beta-\gamma} f|_0^2 \leqslant \text{const} \cdot \|b\|_{2k} \cdot \int_U |b(x)| \sum_{|\lambda| \leqslant m+k} |D^\lambda f(x)|^2 dx$$

其中

$$\|b\|_{2k} = \sum_{|\lambda| \leqslant 2k} \sup_U |D^\lambda b(x)|.$$

因为 $b(x_0) = 0$，所以若 U 充分小，则对于 $f \in C_0^\infty(U)$，$|\alpha| \leqslant m$，$|\beta| \leqslant k$，有

$$|D^\beta(bD^\alpha f)|_0^2 \leqslant \varepsilon |f|_{m+k}^2.$$

因而，若 U 是 x_0 的一个充分小的邻域，则对于 $u \in C_0^\infty(U, r)$，我们有

$$|P'u|_k \leqslant \varepsilon |u|_{m+k}.$$

---

1) 原文误为 $D^\beta(bD^\alpha f) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma b D^{\alpha-\gamma} f$。——译者注

2) 原文将不等式左端误为 $|D^\gamma b D^{\alpha-\gamma} f|_0^2$。——译者注

3.6.11 的证明 我们首先注意，对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega',r)$，有

$$|u|_{m+k}\leqslant C'\{|Pu|_k+|u|_0\}.$$

事实上，令 $\{U_1,\cdots,U_h\}$ 是 $\overline{\Omega'}$ 的一个覆盖，使得对于所有 $u\in C_0^\infty(U_j,r)$，有

$$|u|_{m+k}\leqslant C|Pu|_k.$$

令

$$\eta_j\in C_0^\infty(U_j),\ 0\leqslant\eta_j\leqslant 1,$$

并且对于 $\overline{\Omega'}$ 的一个邻域中所有的 x，有

$$\sum\eta_j(x)=1.$$

我们有

$$\left||u|_{m+k}^2-\sum_j|\eta_j u|_{m+k}^2\right|\leqslant \text{const}\cdot|u|_{m+k-1}^2,$$

$$\left||Pu|_k^2-\sum_j|P(\eta_j u)|_k^2\right|\leqslant \text{const}\cdot|u|_{m+k-1}^2.$$

因为

$$|\eta_j u|_{m+k}\leqslant \text{const}\cdot|P(\eta_j u)|_k,$$

因而这就给出了不等式

$$|u|_{m+k}^2\leqslant \text{const}\cdot\{|Pu|_k^2+|u|_{m+k-1}^2\},$$

因而从命题 3.5.16 即得到我们上面的论断.

现令

$$\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ 0\leqslant\varphi\leqslant 1,$$

并且对于 $\overline{\Omega'}$ 的一个邻域中的所有 x，有

$$\varphi(x)=1,$$

并令 $u\in C^\infty(\Omega,r)$. 令 $m'=m+k$. 对于 $|\alpha|\leqslant m'$，我们有

$$D^\alpha(\varphi^{m'}u)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta\varphi^{m'}D^{\alpha-\beta}u$$

$$=\varphi^{m'}D^\alpha u+\sum_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq 0}c_\beta\varphi^{m'-|\beta|}D^{\alpha-\beta}u,\ c_\beta\in C_0^\infty(\Omega).$$

将等式两端平方，利用 Schwarz 不等式，再对所有满足 $|\alpha|\leqslant m'=$

$m+k$ 的 α 求和，我们就得到

$$|\varphi^{m+k}u|_{m+k}^2 - \sum_{|\alpha|\leqslant m+k}|\varphi^{m+k}D^\alpha u|_0^2| \leqslant \text{const} \cdot \sum_{|\beta|<m+k}|\varphi^{|\beta|}D^\beta u|_0^2.$$

然而，从上面我们已经证明了的结果得到，

$$|\varphi^{m+k}u|_{m+k}^2 \leqslant \text{const}\cdot\{|P(\varphi^{m+k}u)|_k^2 + |\varphi^{m+k}u|_0^2\}.$$

此外，从命题 3.6.7 得到

$$\sum_{|\beta|<m+k}|\varphi^{|\beta|}D^\beta u|_0^2 \leqslant \varepsilon \sum_{|\beta|=m+k}|\varphi^{m+k}D^\beta u|_0^2 + C(\varepsilon)(|u|_0^\Omega)^2.$$

综合这些不等式，并取 ε 充分小，我们就得到

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m+k}|\varphi^{m+k}D^\alpha u|_0^2 \leqslant \text{const}\cdot\{|\varphi^{m+k}Pu|_k^2 + (|u|_0^\Omega)^2\}.$$

因为当 $x\in\Omega'$ 时 $\varphi(x)=1$，并且 $\text{supp}(\varphi)\subset\Omega$，因而从上述不等式即得(3.6.11)。

(3.6.11)的一个直接推论是下述定理：

3.6.12 定理 令 P 是开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上从 ϑ_r 到 ϑ_s 的一个椭圆微分算子．令

$$\mathscr{P} = \{u\in C^\infty(\Omega, r)\,|\,Pu=0\}.$$

则，$\mathscr{P}$ 中一列元素 $\{u_\nu\}$ 在 $C^\infty(\Omega, r)$ 的拓扑中收敛，当且仅当对于任何紧子集 $K\subset\Omega$，有

$$\int_K |u_\nu - u_\mu|^2 dx \to 0 \quad 当\ \nu,\mu\to\infty 时.$$

更一般地，若 $\{u_\nu\}$ 是 $C^\infty(\Omega, r)$ 中的一个元素序列，使得 $\{Pu_\nu\}$ 在 $C^\infty(\Omega, s)$ 中收敛，并且对于任何紧集 $K\subset\Omega$，有

$$\int_K |u_\nu - u_\mu|^2 dx \to 0,$$

则 $\{u_\nu\}$ 在 $C^\infty(\Omega, r)$ 中收敛．

本节中所给出的证明基本上都是 Gårding [1953] 和 Friedrichs [1953] 中的证明．

§3.7. 具有 C^∞ 系数的椭圆算子：正则性定理

令Ω是$\boldsymbol{R}^n$中的一个开集，P是Ω上的一个从ϑ_r到ϑ_s的线性微分算子．令$u\in H_0(\Omega)$．我们把Pu定义为$C_0^\infty(\Omega,s)$上的一个线性泛函，它的定义是

$$(Pu)(v)=\langle u,P^*v\rangle,\quad v\in C_0^\infty(\Omega,s).$$

如果对于某个q，$1\leqslant q\leqslant\infty$，存在一个$g\in L^q(\Omega,s)$，使得对于所有$v\in C_0^\infty(\Omega,s)$，有

$$(Pu)(v)=\langle g,v\rangle,$$

则我们把这个线性泛函Pu等同于g，并写为$Pu=g$，$Pu\in L^q(\Omega,s)$．注意，当$u\in C^\infty(\Omega,r)$时，这与通常的记号是一致的．此外，如果P的阶为m，并且$u\in H_m(\Omega)$，则$Pu\in H_0(\Omega)$．如果g属于$L^2(\Omega,s)=H_0(\Omega)$的某个子空间，则我们也将说$Pu$在这个子空间中．

令P是一个从ϑ_r到其自身的$2m$阶一致强椭圆算子，并记为

$$P=\sum_{\nu=1}^{N}R_\nu^*\circ Q_\nu,$$

其中，Q_ν，R_ν是从ϑ_r到其自身的阶数$\leqslant m$的算子．对于$u,v\in C_0^\infty(\Omega,r)$，令

$$H\langle u,v\rangle=\sum_{\nu=1}^{N}\langle Q_\nu u,R_\nu v\rangle.$$

显然，这个定义可以开拓到所有的元素$u,v\in H_m(\Omega)$．令h是一个异于0的实数．令$\Omega'\Subset\Omega$，并令$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega'$．我们记

$$x+h=(x_1+h,x_2,\cdots,x_n),$$

并且假设，对于$x\in\Omega'$，我们有$x+h\in\Omega$．若$g\in H_m(\Omega)$，则我们令

$$g^h(x)=h^{-1}\{g(x+h)-g(x)\}.$$

这些记号适用于命题 3.7.1-3.7.4．

3.7.1 命题 若 $\eta\in C_0^\infty(\Omega,1)$，则存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $f\in H_0(\Omega)$，我们有

$$|(\eta f)^h-\eta(f^h)|_0\leqslant C|f|_0.$$

并且，存在一个 $C>0$，使得对于任何 $u\in\mathring{H}_m(\Omega)$ 和充分小的 h，我们有 $|u^h|_{m-1}\leqslant C|u|_m$.

证明 我们有

$$(\eta f)^h(x)-(\eta f^h)(x)=\eta^h(x)f(x+h),$$

因而得到第一个不等式. 至于第二个不等式，若 $u\in C_0^\infty(\Omega,r)$，则我们有

$$u^h(x)=\int_0^1\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1+th,x_2,\cdots,x_n)dt,$$

因而当 $u\in C_0^\infty(\Omega,r)$时，由此我们就得到第二个不等式. 而一般情形中的不等式由 $C_0^\infty(\Omega,r)$ 的稠性即得.

3.7.2 定理 令 $f\in H_m(\Omega)$有紧支集包含在 Ω 中，$m\geqslant 1$. 假设存在一个 $C>0$，使得对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega,r)$，有

$$|H\langle f,u\rangle|\leqslant C|u|_{m+1},$$

则 $f\in\mathring{H}_{m+1}(\Omega)$.

证明 令 $h\neq 0$ 充分小. 我们将用 $O(|u|_m)$ 表示 u 和 h 的任何复值函数 G，它满足

$$|G|\leqslant \text{const}\cdot|u|_m,$$

其中的常数可以依赖于 f，但是不依赖于 u 和 h. 我们有

$$H\langle f^h,u\rangle=\sum_{\nu=1}^N\langle Q_\nu f^h,R_\nu u\rangle.$$

因为 $D^\alpha(f^h)=(D^\alpha f)^h$，则从命题 3.7.1 即得，作为 h 的函数，$|Q_\nu f^h-(Q_\nu f)^h|_0$ 是有界的. 因而

$$H\langle f^h,u\rangle=\sum_\nu\langle(Q_\nu f)^h,R_\nu u\rangle+O(|u|_m).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\langle(Q_\nu f)^h,R_\nu u\rangle&=-\langle Q_\nu f,(R_\nu u)^{-h}\rangle\\&=-\langle Q_\nu f,R_\nu u^{-h}\rangle+O(|u|_m),\end{aligned}$$

因而

$$H\langle f^h, u\rangle = -H\langle f, u^{-h}\rangle + O(|u|_m).$$

然而，由假设，我们有

$$|H\langle f, u^{-h}\rangle| \leqslant C|u^{-h}|_{m-1} \leqslant C'|u|_m$$

(命题 3.7.1)．因而，存在一个常数 $C_1 > 0$，使得

$$|H\langle f^h, u\rangle| \leqslant C_1|u|_m \quad \text{对于所有} \quad u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

令 $\{u_\nu\}$ 是 $C_0^\infty(\Omega, r)$ 的一个元素序列，它在 $H_m(\Omega)$ 中收敛于 f^h．我们有

$$|H\langle f^h, f^h\rangle| = \lim |H\langle f^h, u_\nu\rangle| \leqslant C_1 \lim |u_\nu|_m = C_1|f^h|_m.$$

并且，由不等式 3.6.3，存在一个 $C_2 > 0$，使得

$$\begin{aligned} |u_\nu|_m^2 &\leqslant C_2\{|\langle Pu_\nu, u_\nu\rangle| + |u_\nu|_0^2\} \\ &= C_2\{|H\langle u_\nu, u_\nu\rangle| + |u_\nu|_0^2\}, \end{aligned}$$

因而，令 $\nu \to \infty$，我们就得到[1]

$$\begin{aligned} |f^h|_m^2 &\leqslant C_2\{|H\langle f^h, f^h\rangle| + |f^h|_0^2\} \\ &\leqslant C_3\{|f^h|_m + |f^h|_0^2\}. \end{aligned}$$

因为 $m \geqslant 1$，因而由命题 3.7.1，当 $h \to 0$ 时 $|f^h|_0$ 是有界的．因而，当 $h \to 0$ 时，我们有

$$|f^h|_m^2 \leqslant C_3|f^h|_m + C_4.$$

这蕴涵着当 $h \to 0$ 时 $|f^h|_m$ 是有界的．这样，$\{f^h\}$ 是 Hilbert 空间 $H_m(\Omega)$ 中的一个有界集．因而存在一个序列 $\{h_\mu\}$，$h_\mu \to 0$，使得 f^{h_μ} 在 $H_m(\Omega)$ 中弱收敛于某个元素 g，即，对于所有 $v \in H_m(\Omega)$，有

$$[f^{h_\mu}, v]_m \to [g, v]_m$$

(参阅方程 3.4.6)．

此外，因为 $m \geqslant 1$，则在 $H_0(\Omega)$ 中

$$f^h \to \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

由此即得 $\partial f/\partial x_1 = g \in H_m(\Omega)$．用完全相同的方法我们可以得到，

---

1) 原文将最后一个 $|f^h|_0^2$ 误为 $|f_0^h|_0^2$．——译者注

对于 $j=1,\cdots,n$, $\partial f/\partial x_j\in H_m(\Omega)$. 因而，由定理 3.4.12, f 是 $m+1$ 次强可微的. 因为 f 有紧支集，所以 $f\in \mathring{H}_{m+1}(\Omega)$.

3.7.3 命题 令 $f\in H_k(\Omega)$, L 是 $\bar{\Omega}$ 的某个邻域上的一个从 ϑ_r 到其自身的线性微分算子. 若 L 的阶 $\leqslant p$, $p\geqslant k$, 则对于所有 $u\in C_0^\infty(\Omega, r)$, 我们有

$$|\langle f, Lu\rangle|\leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{p-k}.$$

证明 如果我们写为 $L=\sum B_\nu^*\circ A_\nu$, 其中 A_ν 的阶 $\leqslant p-k$, B_ν 的阶 $\leqslant k$, 则我们有

$$\langle f, Lu\rangle=\sum\langle B_\nu f, A_\nu u\rangle,$$

由此即得我们的结论，因为 $B_\nu f\in H_0(\Omega)$.

3.7.4 命题 令 $f\in H_m(\Omega)$, 并且假设对于某个整数 μ, $0<\mu\leqslant m$, 存在一个常数 $C>0$, 使得

$$|H\langle f, u\rangle|\leqslant C|u|_{m-\mu}\quad 对于所有\ u\in C_0^\infty(\Omega, r),$$

则 f 是 $m+\mu$ 次强可微的.

证明 我们通过关于 μ 的归纳法来进行.

$\mu=1$ 的情形: 假设

$$|H\langle f, u\rangle|\leqslant C|u|_{m-1}.$$

令 $\eta\in C_0^\infty(\Omega, 1)$. 若 $P=\sum R_\nu^*\circ Q_\nu$ 如本节开始时所述，则我们有

$$\sum\langle \eta Q_\nu f, R_\nu u\rangle-\sum\langle Q_\nu(\eta f), R_\nu u\rangle=\langle f, L'u\rangle,$$

其中 L' 的阶 $\leqslant 2m-1$[1] (因为 $\eta Q_\nu f-Q_\nu(\eta f)=Qf$ 是一个阶数 $\leqslant m-1$ 的线性微分算子). 此外[2],

$$\sum\langle \eta Q_\nu f, R_\nu u\rangle-\sum\langle Q_\nu f, R_\nu(\bar{\eta}u)\rangle=\langle f, L''u\rangle,$$

其中 L'' 的阶数 $\leqslant 2m-1$[3]. 因而

$$H\langle \eta f, u\rangle-H\langle f, \bar{\eta}u\rangle=\langle f, Lu\rangle,$$

其中 L 的阶数 $\leqslant 2m-1$. 因为 $f\in H_m(\Omega)$, 因而命题 3.7.3 就蕴涵着

---

1) 原文将 L' 误为 L. ——译者注

2) 原文将 $\sum\langle Q_\nu f, R_\nu(\bar{\eta}u)\rangle$ 误为 $\sum\langle Q_\nu f, R_\nu(\bar{\eta}f\rangle$. ——译者注

3) 原文将 L'' 误为 L'. ——译者注

$$|H\langle \eta f, u\rangle - H\langle f, \bar{\eta} u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-1}.$$

因为由假设，$|H\langle f, \bar{\eta} u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |\bar{\eta} u|_{m-1}$，因而上式给出

$$|H\langle \eta f, u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-1},$$

从而由命题 3.7.1 得 $\eta f \in \mathring{H}_{m+1}(\Omega)$. 由于 η 是任意的，这就蕴涵着 f 是 $m+1$ 次强可微的.

一般情形：现在假设，当 $\mu = \mu_0 - 1$, $1 < \mu_0 \leqslant m$ 时结论已被证明[1]，并且

$$|H\langle f, u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0}.$$

由归纳假设，f 是 $m + \mu_0 - 1$ 次强可微的. 如果把我们的注意力集中于一个开集 $\Omega' \Subset \Omega$ 上，则我们不妨假设 $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$. 令 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是一个 n-数组，满足 $|\alpha| = 1$，则我们立即得到

$$H\langle D^\alpha f, u\rangle + H\langle f, D^\alpha u\rangle = \langle f, Lu\rangle,$$

其中 L 是一个阶数 $\leqslant 2m$ 的微分算子. 因为 $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$，因而仍由命题 3.7.3，从上式就得到

$$|H\langle D^\alpha f, u\rangle + H\langle f, D^\alpha u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1}.$$

因为

$$|H\langle f, D^\alpha u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |D^\alpha u|_{m-\mu_0} \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1},$$

因而就得到

$$|H\langle D^\alpha f, u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1} = \text{const} \cdot |u|_{m-\mu}.$$

由归纳假设，这蕴涵着 $D^\alpha f$ 是 $m + \mu_0 - 1$ 次强可微的，则从定理 3.4.12 即得我们的命题.

3.7.5 命题 若 $f \in H_m(\Omega)$，Pf 是 μ 次强可微的，$\mu \geqslant 0$，则 f 是 $2m + \mu$ 次强可微的.

证明 我们首先对于 $\mu = 0$ 证明此定理. 若 $Pf \in H_0(\Omega)$，则意味着存在 $g \in H_0(\Omega)$，使得

$$\langle f, P^* u\rangle = \langle g, u\rangle \text{ 对于所有 } u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

因为 $f \in H_m(\Omega)$，因而这蕴涵着

$$H\langle f, u\rangle = \langle g, u\rangle,$$

因此 $|H\langle f, u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_0$. 由命题 3.7.4，$f$ 是 $2m$ 次强可微的.

---

1) 原文将 $1<\mu_0\leqslant m$ 误为 $0<\mu_0\leqslant m$.——译者注

现在假设已经证明了 f 是 $2m+\mu-1$ 次强可微的. 用 Ω 的一个相对紧开子集代替 Ω, 我们不妨假设 $f\in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$, 并不妨假设存在一个 $g\in H_\mu(\Omega)$, 使得

$$\langle f, P^*u\rangle=\langle g, u\rangle,\quad u\in C_0^\infty(\Omega, r).$$

当 $|\alpha|\leqslant\mu$ 时,我们考虑算子

$$L=P\circ D^\alpha-D^\alpha\circ P,$$

其中 D^α 是由

$$(u_1,\cdots,u_r)\longmapsto(D^\alpha u_1,\cdots,D^\alpha u_r)$$

给出的从 $\mathscr{G}_r$ 到其自身的通常的求导算子. 显然, L 的阶数 $\leqslant 2m+\mu-1$. 因而

$$P(D^\alpha f)=D^\alpha g+Lf,$$

其中 $g=Pf\in H_\mu(\Omega)$. 因为由归纳假设 $f\in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$, 因而上式蕴涵着

$$P(D^\alpha f)\in H_0(\Omega).$$

由上面所证明过的特殊情形, $D^\alpha f$ 是 $2m$ 次强可微的. 而因为 α, $|\alpha|\leqslant\mu$, 是任意的,因而就证明了命题.

3.7.6 命题 令 Δ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上从 $\mathscr{G}_r$ 到 $\mathscr{G}_r$ 的 Laplace 算子(例 3.3.15, (c)). 若 $f\in H_0(\boldsymbol{R}^n)$, 并且 $\rho\geqslant 1$ 是一个整数, 则存在一个 $F\in H_{2\rho}(\boldsymbol{R}^n)$, 使得 $(I-\Delta)^\rho F=f$; 这里 $I-\Delta$ 是算子

$$u\longmapsto u-\Delta u,$$

而

$$(I-\Delta)^\rho=(I-\Delta)\circ\cdots\circ(I-\Delta),$$

其中的积是 ρ 次的.

证明 由 Plancherel 定理 3.2.8 知 $\hat{f}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. 令

$$\phi(\xi)=\hat{f}(\xi)(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{-\rho}.$$

因为 $\phi\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, 因此存在一个 $F\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, 满足 $\hat{F}=\phi$. 并且

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|\xi|^2)^{2\rho}|\hat{F}(\xi)|^2d\xi<\infty.$$

因而,由(3.4.9)得 $F\in H_{2\rho}(\boldsymbol{R}^n)$. 我们容易得到

$$(I-\Delta)^\rho F=f.$$

现在我们考虑在一个开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的从 ϑ_r 到 ϑ_s 的一个任意的椭圆算子 P.

3.7.7 正则性定理 令 P 是开集 $\Omega\subset R^n$ 上的一个从 ϑ_r 到 ϑ_s 的椭圆微分算子. 假设 $f\in H_0(\Omega)$, 并且 $Pf\in C^\infty(\Omega,s)$, 则 $f\in C^\infty(\Omega,r)$.

证明 考虑算子

$$L=(-1)^m P^*\circ P,\quad m=P\text{ 的阶数},$$

则 L 是一个从 ϑ_r 到 ϑ_r 的椭圆算子[1],并且,若 $\Omega'\Subset\Omega$, 则 L 在 Ω' 上是一致强椭圆的(推论 3.6.2). 此外,

$$Lf=(-1)^m P^*g,\quad g=Pf,$$

因此,若 $Pf\in C^\infty(\Omega,s)$, 则 $Lf\in C^\infty(\Omega,r)$. 因而,我们不妨假设 P 是从 ϑ_r 到 ϑ_r 的 $2m$ 阶一致强椭圆算子.

若 $f\in H_0(\Omega)$, 则我们用

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & \text{若 } x\in\Omega,\\ 0 & \text{若 } x\notin\Omega\end{cases}$$

定义 $f_0\in H_0(\boldsymbol{R}^n)$. 由命题 3.7.6, 存在一个 $F_0\in H_{2m}(\boldsymbol{R}^n)$[2], 使得

$$(I-\Delta)^m F_0=f_0.$$

令[3]

$$P_0=(-1)^m P\circ(I-\Delta)^m,$$

则 P_0 是一个 $4m$ 阶的一致强椭圆算子. 此外,若 $F_0|\Omega=F$, 则我们有

$$F\in H_{2m}(\Omega),\quad P_0F=(-1)^m Pf\in C^\infty(\Omega,r).$$

因而, 由命题 3.7.4, 对于任何 $\mu\geqslant 0$, F 是 $4m+\mu$ 次强可微的. 由命题 3.5.13, 即得 $F\in C^\infty(\Omega,r)$. 因而

$$f=(-1)^m(I-\Delta)^m F\in C^\infty(\Omega,r).$$

这里给出的正则性定理的证明基本上是 Nirenberg [1955] 的证明. 还有其它一些可取的证明. 最早的一个证明由 L. Schwartz

---

1) 原文将后一 ϑ_r 误为 ϑ_s. ——译者注

2) 原文将 $H_{2m}(\boldsymbol{R}^n)$ 误为 $H_{2m}(\boldsymbol{R}^m)$. ——译者注

3) 原文将 $P\circ(I-\Delta)^m$ 误为 $P\circ(I-\Delta^m)$. ——译者注

[1950/51] 所提出，该证明是利用"基本解"来处理的. 用这个方法可以得到一些很强的定理，这些定理可在 Hörmander [1963] 中找到. 只利用先验估计 (Gårding, Friedrichs 型的不等式) 的第一个证明属于 Friedrichs [1953] (然而他只证明了一个比较弱的结果). 另外一些证明属于 John [1955] 和 Lax [1955]. Lax 的证明短而漂亮，但是用了空间 $H_m(\Omega)$ 的对偶空间. 另外一些利用所谓拟微分算子的很一般的和漂亮的证明可以在 Schwartz [1963/64] 中找到. 也可参阅 Hörmander [1965] 和 Nirenberg [1970]. 围绕着这个定理及其推广，例如，"在边界的正则性"的问题，或者关于抛物算子和其它算子的相应的结果，已经有数量相当多的文献了.

§3.8. 具有解析系数的椭圆算子

3.8.1 命题 若 K 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个紧子集，令

$$K_\delta = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid d(x, K) < \delta\}.$$

则存在常数 $C_\alpha > 0$，使得对于任给的紧集 $K \subset \boldsymbol{R}^n$ 和任给的 $\delta > 0$，存在 $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，满足

$$0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1,\ \varphi_\delta(x) = 1 \text{ 对于 } x \in K,\ \operatorname{supp}(\varphi_\delta) \subset K_\delta,$$

并且，对于所有 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，有

$$|D^\alpha \varphi_\delta(x)| \leqslant C_\alpha \delta^{-|\alpha|}.$$

证明 令 ϕ 是一个 C^∞ 函数，满足

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \phi(x)dx = 1,\ \phi \geqslant 0 \text{ 和 } \operatorname{supp}(\phi) \subset \{x \mid \|x\| < 1\}.$$

令 χ_δ 是 K_δ 的特征函数，即

$$\chi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \in K_\delta, \\ 0 & \text{若 } x \notin K_\delta. \end{cases}$$

令

$$\phi_\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} \phi((x-y)/\delta) \chi_\delta(y) dy,$$

则当 $x \in K$ 时 $\phi_\delta(x) = 1$，并且 $\operatorname{supp}(\phi_\delta) \subset K_{2\delta}$. 此外，

$$D^{\alpha}\psi_{\delta}(x)=\delta^{-n-|\alpha|}\int_{R^n}(D^{\alpha}\psi)((x-y)/\delta)\chi_{\delta}(y)dy,$$

因而

$$|D^{\alpha}\psi_{\delta}(x)|\leqslant\delta^{-|\alpha|}\int_{R^n}|D^{\alpha}\psi(y)|dy.$$

我们只需取 $\psi_{\delta}=\varphi_{\delta/2}$ 即可.

3.8.2 注 在下文中，R 和 ρ 是两个实数，满足 $0<\rho<\min\{1,R\}$，并且我们令 $\Omega_0=\{x|\|x\|<R\}$. 对于 $f\in L^2(\Omega_0,r)$[1]，令

$$M_{\rho}(f)^2=\int_{\|x\|<R-\rho}|f(x)|^2dx.$$

令 $\delta>0$ 和 $\Omega=\{x|\|x\|<R+\delta\}$.

3.8.3 命题 令 P 是 Ω 上的一个从 ϑ_r 到其自身的 m 阶椭圆算子，则存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $u\in C^{\infty}(\Omega,r)$ 和所有正数 $\rho,\rho':\rho+\rho'<R$，我们有[2]

$$\rho^m M_{\rho+\rho'}(D^{\alpha}u)\leqslant C\left\{\rho^m M_{\rho'}(Pu)+\sum_{|\beta|<m}\rho^{|\beta|}M_{\rho'}(D^{\beta}u)\right\}$$

对于 $|\alpha|=m$.

证明 令 $\varphi\in C_0^{\infty}(R^n)$，使得 $0\leqslant\varphi\leqslant1$，并且当 $\|x\|<R-\rho-\rho'$ 时 $\varphi(x)=1$，以及

$$\operatorname{supp}(\varphi)\subset\{x|\|x\|<R-\rho'\};$$

此外，可以这样选取 φ，使得

$$|D^{\alpha}\varphi|\leqslant C_{\alpha}\rho^{-|\alpha|},$$

其中 C_{α} 是只依赖于 α 和 n 的常数(命题 3.8.1). 由(3.6.11)，存在一个常数 $A>0$，使得对于 $|\alpha|\leqslant m$，有

$$|D^{\alpha}(\varphi u)|_0\leqslant A\{|P(\varphi u)|_0+|\varphi u|_0\}.$$

令

$$Pu(x)=\sum_{|\lambda|\leqslant m}a_{\lambda}(x)D^{\lambda}u(x),$$

其中诸 a_{λ} 在 Ω 上是 C^{∞} 的. 我们有

1) 原文误为 $f\in L^2(\Omega,r)$. ——译者注

2) 原文将 $\rho^m M_{\rho+\rho'}(D^{\alpha}u)$ 误为 $\rho^m M_{\rho+\rho'}(D^{\alpha}\mu)$. ——译者注

$$P(\varphi u)-\varphi P(u)=\sum_{\beta<\lambda,|\lambda|\leqslant m} a_\lambda\binom{\lambda}{\beta}D^{\lambda-\beta}\varphi D^\beta u.$$

显然，存在不依赖于 ρ 的常数 $c_{\lambda,\beta}$，使得

$$\left|a_\lambda(x)\binom{\lambda}{\beta}D^{\lambda-\beta}\varphi(x)\right|\leqslant c_{\lambda,\beta}\rho^{-|\lambda-\beta|} \quad 对于 \|x\|\leqslant R.$$

因而

$$|D^\alpha(\varphi u)|_0\leqslant \text{const}\cdot\left\{M_{\rho'}(Pu)+\sum_{|\beta|<m}\rho^{-m+|\beta|}M_{\rho'}(D^\beta u)\right\},$$

这就完成了证明.

3.8.4 定理 令 P 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的某个开集 U 上的一个从 ϑ_r 到其自身的 m 阶椭圆算子，并假设 P 有解析系数，以及 $0\in U$. 若 $R>0$ 和 $\delta>0$ 充分小，则存在一个常数 $A\geqslant 1$，使得对于所有 ρ，$0<\rho<\min\{1,R\}$，和所有 $u\in C^\infty(U,r)$[1]，并且对于 $|\alpha|<km$，$k=1,2,\cdots$，我们有

$$\textbf{3.8.5}\qquad \rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u)\leqslant A^{|\alpha|+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\rho^{(\nu-1)m}M(P^\nu u)+M(u)\right\}.$$

这里，我们已令

$$P^\nu=P\circ\cdots\circ P\ (\nu\ 次积)$$

和

$$M(f)^2=M_{-\delta}(f)^2=\int_{\|x\|<R+\delta}|f(x)|^2dx.$$

证明 若

$$(Pu)(x)=\sum_{|\lambda|\leqslant m}a_\lambda(x)D^\lambda u(x),$$

则诸 a_λ 在 U 上是实解析的. 因而，若 $R_1>0$ 充分小，则 a_λ 是从 $\{z\in\boldsymbol{C}^n\mid\|z\|\leqslant R_1\}$ 到 $r\times r$ 复矩阵空间中的全纯映射在 $\|x\|\leqslant R_1$ 上的限制，我们仍用 a_λ 表示这个全纯映射.

令

---

1) 原文将 $u\in C^\infty(U,r)$ 误为 $u\in C^\infty(\Omega,r)$. ——译者注

$$B = \sum_{|\lambda| \leqslant m} \sup_{\|z\| \leqslant R_1} |a_\lambda(z)|.$$

由 Cauchy 不等式 1.1.4，我们即得

3.8.6 $$\sum_{|\lambda| \leqslant m} |D^\alpha a_\lambda(x)| \leqslant B\alpha!\rho^{-|\alpha|} \quad 对于 \quad \|x\| \leqslant R_1 - \rho.$$

令 $0 < R < R_1$，$\delta = R_1 - R$，并令

$$S_k(u) = S_k(u, \rho) = \sum_{\nu=1}^{k} \rho^{(\nu-1)m} M(P^\nu u) + M(u),$$

则我们有

3.8.7 $$\rho^m S_k(Pu) \leqslant S_{k+1}(u).$$

我们用关于 k 的归纳法来证明不等式(3.8.5)．对于 $k = 1$，即，对于 $|\alpha| \leqslant m$，由(3.6.11)我们有

$$M_0(D^\alpha u) \leqslant C_2\{M(Pu) + M(u)\},$$

因而(3.8.5)成立（对于 $\rho \leqslant 1$），只要 $A > C_2$．现在假设 $km < |\alpha| \leqslant (k+1)m$，并假设对于所有 β，$|\beta| < |\alpha|$，(3.8.5)已被证明．令 $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$，其中 $|\alpha_0| = m$．在命题 3.8.3 中令 $\rho' = (|\alpha| - 1)\rho$，并用 α_0 代替 α，$D^{\alpha'}u$ 代替 u，则我们得到

3.8.8 $$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u) \leqslant C\left\{\rho^{|\alpha|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(PD^{\alpha'}u) + \sum_{|\beta|<m} \rho^{|\beta|+|\alpha'|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\beta+\alpha'}u)\right\}.$$

此外，

$$D^{\alpha'}Pu - PD^{\alpha'}u = \sum_{|\lambda| \leqslant m} \sum_{\gamma < \alpha'} \binom{\alpha'}{\gamma} D^{\alpha'-\gamma} a_\lambda D^{\gamma+\lambda} u.$$

然而，对于 $\|x\| \leqslant R - mk\rho$，我们有

$$|D^{\alpha'-\gamma} a_\lambda(x)| \leqslant B(\alpha' - \gamma)!(mk\rho)^{-|\alpha'-\gamma|} \quad (参阅 3.8.6),$$

以及

$$\binom{\alpha'}{\gamma} \frac{(\alpha' - \gamma)!}{(mk)^{|\alpha'-\gamma|}} \leqslant \left(\frac{|\alpha'|}{mk}\right)^{|\alpha'-\gamma|} \leqslant 1$$

（因为 $|\alpha'| = |\alpha| - m \leqslant km$）．因而，对于 $\|x\| \leqslant R - mk\rho$，自然，亦对于 $\|x\| \leqslant R - (|\alpha| - 1)\rho$，我们有

3.8.8' $|D^{\alpha'}Pu(x)-PD^{\alpha'}u(x)|\leqslant B\sum_{|\lambda|\leqslant m}\sum_{\gamma<\alpha'}\rho^{-|\alpha'-\gamma|}|D^{\gamma+\lambda}u(x)|$.

从(3.8.8)和(3.8.8')我们得到:

对于 $km<|\alpha|\leqslant(k+1)m$，我们有

$$\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u)\leqslant C\Big\{\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha'|\rho}(D^{\alpha'}Pu)$$

$$+\sum_{|\beta|<m}\rho^{|\beta|+|\alpha'|}M_{|\beta+\alpha'|\rho}(D^{\beta+\alpha'}u)$$

$$+B\sum_{|\lambda|\leqslant m}\sum_{\gamma<\alpha'}\rho^{m+|\gamma|}M_{(m+|\gamma|)\rho}(D^{\gamma+\lambda}u)\Big\}.$$

现在我们可以对上述不等式右端括号中的三项应用我们的归纳假设了.

第一项

$$\leqslant\rho^m A^{|\alpha'|+1}S_k(Pu)\leqslant A^{|\alpha'|+1}S_{k+1}(u)\ (参阅\ 3.8.7).$$

第二项

$$\leqslant\sum_{|\beta|<m}A^{|\beta+\alpha'|+1}S_{k+1}(u),$$

而第三项

$$\leqslant B'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{m+|\gamma|+1}S_{k+1}(u).$$

这给出了

$$\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u)\leqslant A^{|\alpha|+1}S_{k+1}(u)\Big\{CA^{-m}$$

$$+C\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{A}+CB'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}\Big\}$$

(因为 $|\alpha|=m+|\alpha'|$). 然而

$$\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}\leqslant A^{-1}\sum_{|\beta|\geqslant 0}A^{-|\beta|}\to 0\quad 当 A\to\infty 时.$$

因而我们可以选取 $A\geqslant C_2$ 充分大,使得

$$CA^{-m}+C\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{A}+CB'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}<1,$$

这就给出了(3.8.5).

3.8.9 定理 (Kotaké-M.S.Narasimhan [1962]). 令 P 是开集 $U\subset R^n$ 上的一个从 $\mathscr{G}_r$ 到其自身的具有解析系数的 m 阶椭圆算子. 令 $u\in C^\infty(U,r)$, 并假设对于每个 $U'\Subset U$, 存在一个 $M>0$, 使得

$$|P^k u|_0^{\Omega'}\leqslant M^{k+1}(km)!,\quad k=1,2,\cdots,$$

则 u 在 U 中是解析的[1].

证明 我们不妨假设 $0\in U$, 并且只需证明 u 在 0 的一个邻域中是解析的. 选取 R, δ, 使得(3.8.5)成立,则我们有

$$M(P^\nu u)\leqslant M^{\nu+1}(\nu m)!,\quad \nu=1,2,\cdots,$$

因而对于任何 $\rho>0$, 有

$$S_k(u)\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}M^{\nu+1}\rho^{(\nu-1)m}(\nu m)!+M.$$

如果我们取 $\rho=c/km$, c 充分小,则对于 $\nu\leqslant k$, 我们有

$$(\nu m)!\rho^{(\nu-1)m}\leqslant(km)^m,$$

因而存在一个常数 $B_1>0$, 使得

$$S_k(u)\leqslant B_1^{k+1}\quad 对于 k\geqslant 1.$$

因而,由(3.8.5),我们即有

$$M_c(D^\alpha u)\leqslant B_2^{k+1}k^k\quad 对于 |\alpha|\leqslant k.$$

若 K 是球 $\{x|\|x\|<R-c\}$ 的一个紧子集,则从命题 3.5.15 我们推得

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)|\leqslant B_3^{k+n+1}(k+n)^{k+n}\quad 对于 |\alpha|\leqslant k.$$

由 Stirling 公式,这蕴涵着

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)|\leqslant B_4^{k+1}\cdot k!\quad 对于 |\alpha|\leqslant k,$$

因而,由(1.1.15,16)知 u 是解析的.

3.8.10 定理 令 P 是一个从 $\mathscr{G}_r$ 到 $\mathscr{G}_r$ 的 m 阶线性微分算子,它的系数在

---

1) 原文将 U 误为 Ω. ——译者注

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_j| < r_j \leqslant 1, j = 1, \cdots, n\}$$

上是全纯的. 令 u 是一个有界全纯映射: $D \to \mathbf{C}^r$, 则存在一个常数 $A > 0$ (依赖于 u), 使得

$$|P^\nu u(z)| \leqslant \frac{(3A)^{\nu+1}(m\nu)!}{\prod_j (r_j - |z_j|)^{m\nu}} \qquad 对于\ z \in D.$$

我们首先证明下述命题:

3.8.11 命题 若 h 在 $\{w \in \mathbf{C} \mid |w| < R\}$ 中是全纯的,并且

$$|h(w)| < M(R - |w|)^{-\mu}, \ |w| < R,$$

则

$$|h'(w)| < 3(\mu + 1)M(R - |w|)^{-(\mu+1)}, \ |w| < R,$$

其中 $h'(w)$ 是 h 的导数.

证明 令 $|w_0| < R$ 和 $0 < \varepsilon < R - |w_0|$. 由 Cauchy 不等式得

$$|h'(w_0)| \leqslant \varepsilon^{-1} \sup_{|w-w_0|=\varepsilon} |h(w)| \leqslant M\varepsilon^{-1}(R - |w_0| - \varepsilon)^{-\mu}.$$

若我们取

$$\varepsilon = \frac{R - |w_0|}{\mu + 1},$$

则我们有

$$|h'(w_0)| \leqslant M(\mu + 1)(R - |w_0|)^{-(\mu+1)} \left(\frac{\mu + 1}{\mu}\right)^\mu.$$

因为 $(1 + 1/\mu)^\mu < e < 3$, 因而就得到所需要的不等式.

定理(3.8.10)的证明 由归纳法,我们假设

$$|P^{\nu-1}u(z)| \leqslant \frac{(3A)^\nu(m(\nu - 1))!}{\prod(r_j - |z_j|)^{m(\nu-1)}}, \ z \in D,$$

其中

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} |a_\alpha(z)| \leqslant A,$$

以及

$$(Pu)(z) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(z) D^\alpha u(z).$$

则由命题 3.8.11, 我们即有

$$|D^\alpha P^{\nu-1}u(z)| \leqslant \frac{3(3A)^\nu(m\nu)!}{\Pi(r_j - |z_j|)^{m(\nu-1)+|\alpha|}},$$

并且因为

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha(z)| \leqslant A,$$

因此得到我们的结论.

3.8.12 Petrovsky **定理** 若 P 是 Ω 上从 $\mathscr{D}_r$ 到 $\mathscr{D}_s$ 的一个具有解析系数的 m 阶椭圆算子,且若 $u\in C^\infty(\Omega, r)$ 使得 Pu 是解析的,则 u 是解析的.

证明 如果必要的话我们用 $P^*\circ P$ 代替 P,则我们不妨假设 P 是一个从 $\mathscr{D}_r$ 到其自身的椭圆算子. 令 $f = Pu$ 是解析的. 从定理 3.8.10 容易得到,存在一个常数 $M > 0$,使得

$$|P^\nu f(x)| \leqslant M^{\nu+1}(\nu m)! \quad x\in\Omega'\Subset\Omega,$$

此时从定理 3.8.9 即得到我们的定理的证明.

3.8.13 **注** 我们来简略地说明,在对于定理 3.8.12 所需要的那个特殊情形中,我们如何简化定理 3.8.9 的证明. 我们再一次应用(3.8.8)和(3.8.8′). 然后再将 Cauchy 不等式应用于 $f = Pu$ 在复域中的全纯开拓,则我们得到

$$|D^\alpha Pu| \leqslant \text{const}\cdot\alpha!(mk\rho)^{-|\alpha|}$$
$$\text{对于 } \|x\| \leqslant R - mk\rho,$$

这就给出了

$$\rho^{|\alpha'|}M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\alpha'}Pu) \leqslant \text{const}, \text{ 对于 } \rho > 0 \text{ 和所有 } \alpha.$$

这导致下述估计

$$\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u) \leqslant A^{|\alpha|+1}, \quad A = A(u),$$

至此,与以前一样就能完成证明.

本节主要的定理 3.8.12 是 Petrovsky [1939] 的结果的一个特殊情形,其中他还考虑非线性微分方程组. 不过他的证明是很难的. 这里给出的证明的主要思想包含在 Morrey-Nirenberg [1957] 的论文中. 而叙述方法基于 Hörmander [1963].

§3.9. 有限性定理

令V是一个有向C^∞流形，并令ξ，η是V上两个C^∞向量丛。令$\xi=(E, p, V)$，$\eta=(F, q, V)$。令P是一个从ξ到η的m阶线性微分算子。

我们将考虑ξ，η，…的截面，这些截面不一定是连续的。ξ的一个截面是一个映射$s: V\to E$，满足$p\circ s=\mathrm{id}_V$。我们说一个截面s是可测的，如果每个点$a\in V$有一个邻域U和一个同构$\tau:\xi|U\to U\times \boldsymbol{C}^r$，使得平凡丛$U\times \boldsymbol{C}^r$的截面$\tau\circ s$，视作为$r$个函数构成的一个组，是可测的。我们说$s$局部地在$H_m$中，如果可把上面所说的$U$取得与$\boldsymbol{R}^n$的一开集$\Omega$微分同胚，并且$\tau\circ s$，视作为$\Omega$上$r$个函数的一个组，在$H_m(\Omega)$中。我们还将用局部可积截面和其它一些类似的术语。

若P是一个从ξ到η的微分算子，s是ξ的一个局部可积截面，则我们把Ps定义为$C_0^\infty(V, \eta')$上的一个线性泛函λ，它如下定义：*)

$$\lambda(t')=\langle s, P't'\rangle_{\xi'},$$

其中P'是P的转置算子。我们说Ps是局部可积的(C^∞，…)，若存在η的一个局部可积的(C^∞，…)截面t，使得

$$\lambda(t')=\langle s, P't'\rangle_{\xi'}=\langle t, t'\rangle_{\eta'},\quad 对于所有\ t'\in C_0^\infty(V, \eta').$$

如果此元素t存在，则它是唯一确定的(可以相差一个零测集上的值)，并且我们将把Ps等同于t。

作为定理 3.7.7 和 3.8.12 的直接推论，我们得到下面两个定理。

3.9.1 正则性定理 令ξ，η是有向C^∞流形V上的两个C^∞丛，

---

*) 注意，若s是ξ的一个局部平方可积截面，t'是ξ'的一个局部平方可积截面，并且如果它们中之一在V的一个紧子集之外为 0，则如在 §3.3 中一样，我们可以定义

$$\langle t', s\rangle_\xi=\int_V B(t', t).$$

P 是一个从 ξ 到 η 的椭圆算子. 若 s 是 ξ 的一个局部平方可积截面,使得 Ps 是 η 的一个 C^∞ 截面,则 s(几乎处处)等于 ξ 的一个C^∞ 截面.

3.9.2 解析性定理 令 V 是一个实解析流形, ξ, η 是 V 上的解析向量丛. 令 P 是一个从 ξ 到 η 的具有解析系数的椭圆算子,则,若 s 是 ξ 的一个局部平方可积截面, 使得 Ps 是 η 的一个解析截面, 那么 s(几乎处处)等于 ξ 的一个解析截面.

若 s 是从 ξ 的一个截面,则我们令 $\text{supp}(s)$=集合$\{x\in V|s(x)\neq 0_x\}$ 在 V 中的闭包, 其中 0_x 表示向量空间 E_x 中的零元素.

令 K 是 V 的一个紧子集. 我们令 $H_m(K,\xi)$ 为 ξ 的具有下面两个性质的截面 s 的集合: s 局部地在 H_m 中,并且 $\text{supp}(s)\subset K$. 令 $U_1', \cdots, U_h'$ 是有限个坐标邻域, 使得 $\xi|U_j'(j=1,\cdots,h)$ 是平凡的,并令 $K\subset\bigcup U_j'$. 令 $U_j\Subset U_j'$,并令 $K\subset\bigcup U_j$ 令 $\tau_j:\xi|U_j'\to U_j'\times\boldsymbol{C}^r$ 是 C^∞ 同构,并令 $\varphi_j\in C_0^\infty(U_j)$, 对于$K$的某个邻域中的 x, 有 $\sum\varphi_j(x)=1$. 若 $s\in H_m(K,\xi)$, 则我们可以把 $\tau_j(\varphi_j s)$ 看作为 U_j 上 r 个函数的一个组. 我们假设, U_j' 同构于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集 Ω_j'. 若 $\phi_j:U_j'\to\Omega_j'$ 是一个同构,则令 $\phi_j(U_j)=\Omega_j$. 此时,可以把 $\tau_j(\varphi_j s)$ 看作为 Ω_j 上 r 个函数的一个组 $s_j=\tau_j(\varphi_j s)\circ\phi_j^{-1}$, 并且我们有

$$s_j\in H_m(\Omega_j).$$

我们令 $\mathfrak{U}=\{U_1,\cdots,U_h\}$, 并令

$$|s|_{m,\mathfrak{U}}^2=\sum_j|s_j|_m^2.$$

关于这个范数, $H_m(K,\xi)$ 是一个 Hilbert 空间. 令

$$\mathscr{H}=\bigoplus H_m(\Omega_j).$$

由

$$\eta(s)=\bigoplus s_j$$

所给出的映射

$$\eta:H_m(K,\xi)\to\mathscr{H}$$

是从 $H_m(K,\xi)$ 到 $\mathscr{H}$ 的一个闭子空间上的一个等距映射.

此外，我们有

$$\tau_i(s|U_i)\circ\psi_i^{-1}=s_i'\in H_m(\Omega_i).$$

如果我们令

$$\|s\|_{m,\mathfrak{U}}^2=\sum_i|s_i'|_m^2,$$

则 $H_m(K,\xi)$ 关于范数 $\|s\|_{m,\mathfrak{U}}$ 仍为一个 Hilbert 空间. 容易看到，$|s|_{m,\mathfrak{U}}$ 和 $\|s\|_{m,\mathfrak{U}}$ 在 $H_m(K,\xi)$ 上是等价的，并且，具有上面所列那些性质的不同的覆盖 $\mathfrak{U}$ 和不同的单位分解 $\{\varphi_i\}$ 产生等价的范数 $|\cdot|_{m,\mathfrak{U}}$.

和命题 3.4.3 中一样，我们定义一个内射映射

$$i_m:H_m(K,\xi)\to H_{m-1}(K,\xi),\quad m\geqslant 1.$$

此外，从引理 3.5.4 得到:

3.9.3 Rellich 引理 内射映射

$$i_m:H_m(K,\xi)\to H_{m-1}(K,\xi)$$

是全连续的.

3.9.4 命题 对于 $H_0(K,\xi)$ 上的任何连续线性泛函 l，存在唯一的一个 $s'\in H_0(K,\xi')$，使得

$$l(s)=\langle s',s\rangle_\xi,\quad 对于所有 s\in H_0(K,\xi).$$

证明 显然，如果 s' 存在，则它是唯一的. 因而只需证明下述事实:

令 U 是一个坐标邻域，使得 $\xi|U$ 是平凡的，并令 L 是 U 的一个紧子集，则存在一个 $s'\in H_0(L,\xi')$，使得

$$l(s)=\langle s',s\rangle_\xi\quad 对于所有\ s\in H_0(L,\xi).$$

令

$$h:\xi|U\to U\times\boldsymbol{C}^r$$

是一个同构，并令

$$h^*:\xi^*|U\to U\times\boldsymbol{C}^r$$

是对偶丛的相应的同构. 令 $\phi:U\to\Omega$ 是从 U 到一个开集 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的一个同构，并令

$$(s_1,\cdots,s_r)=h(s)\circ\phi^{-1},\quad s\in H_0(L,\xi),$$

则 $s_j \in L^2(\Omega)$，并且在 $\phi(L)$ 之外为 $0(j=1, \cdots, r)$. 由 Riesz 的一个熟知的定理知，存在 $t_1, \cdots, t_r \in L^2(\Omega)$，$t_1, \cdots t_r$ 在 $\phi(L)$ 之外为 0，使得

$$l(s) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{r} s_j t_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad s \in H_0(L, \xi).$$

若我们令

$$s' = (h^*)^{-1}(t_1 \circ \phi, \cdots, t_r \circ \phi) \otimes \phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n),$$

则我们有 $s' \in H_0(L, \xi')$，并且

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \text{对于所有 } s \in H_0(L, \xi).$$

3.9.5 注 若 P 是一个从 ξ 到 η 的 m 阶线性微分算子，则 P 定义了一个连续线性映射

$$P_K: H_m(K, \xi) \to H_0(K, \eta);$$

这里 K 是 V 的一个紧子集.

3.9.6 命题 若 P 是一个从 ξ 到 η 的椭圆微分算子，令

$$\mathscr{P} = \{s \in C^\infty(V, \xi) | Ps = 0\}.$$

则 $\mathscr{P}$ 的一个元素序列 $\{s_\nu\}$，与所有偏导数一起，在 V 的任何紧子集上一致收敛（参阅 3.3.10 下面的注记），当且仅当对于任何紧集 $K \subset V$，$\{s_\nu\}$ 在 $H_0(K, \xi)$ 中收敛，即，由

$$s'_\nu(x) = \begin{cases} s_\nu(x) & \text{若 } x \in K, \\ 0 & \text{若 } x \notin K \end{cases}$$

所定义的序列 $\{s'_\nu\}$ 在 $H_0(K, \xi)$ 中收敛.

证明 从定理 3.6.12 即得.

3.9.7 命题 令 $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ 是两个 Hilbert 空间，A_1, A_2 是两个连续线性映射 $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$，它们具有下述性质：

(a) A_1 是内射的，并且 $A_1(\mathscr{H}_1)$ 在 $\mathscr{H}_2$ 中是闭的；

(b) A_2 是全连续的.

则 $A_1 + A_2$ 的核 $\ker(A_1 + A_2)$ 是有限维的，并且 $(A_1 + A_2)(\mathscr{H}_1)$ 在 $\mathscr{H}_2$ 中是闭的.

证明 由闭图定理，

$$A_1^{-1} = B: A_1(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{H}_1$$

是连续的. 假设 $\ker(A_1+A_2)$ 是无限维的,则存在一个无限的规格化正交序列 $\{x_\nu\}$, $x_\nu \in \mathscr{H}_1$, 使得

$$A_1(x_\nu) = -A_2(x_\nu).$$

因为 $\|x_\nu\| = 1$, 并且 A_2 是全连续的, 则通过取一个子序列, 我们不妨假设 $A_2(x_\nu)$ 收敛于某个元素 y_0. 因而

$$A_1(x_\nu) \to -y_0,$$

以致

$$x_\nu = B(A_1(x_\nu)) \to -B(y_0) \quad \text{当 } \nu \to \infty \text{时},$$

这与 $\{x_\nu\}$ 是规格化正交的这一假设矛盾. 因而 $\ker(A_1+A_2)$ 是有限维的.

令 $N = \ker(A_1+A_2)$, M 是 N 在 $\mathscr{H}_1$ 中的正交补. 令 T 是 A_1+A_2 在 M 上的限制. 则 T 是连续的并为内射的, 并且, $T(M) = (A_1+A_2)(\mathscr{H}_1)$. 为了证明这个空间是闭的,只需证明 $T^{-1}|T(M)$ 是连续的. 令

$$y_\nu \in T(M), \quad y_\nu \to 0.$$

令

$$x_\nu \in M, \ T(x_\nu) = y_\nu.$$

若 $\{x_\nu\}$ 不趋于零, 则我们可以假设 $\|x_\nu\| \geqslant \rho > 0$. 若 $x_\nu' = x_\nu/\|x_\nu\|$, 则我们有

$$(Tx_\nu') = A_1(x_\nu') + A_2(x_\nu') \to 0,$$

以致再一次由 A_2 的全连续性,我们可以假设 $A_2(x_\nu')$ 收敛,所以也可以假设 $A_1(x_\nu')$ 收敛. 因而, 由于 B 是连续的, 故 $x_\nu' = BA_1(x_\nu)$ 收敛于某个 x_0'. 显然, $\|x_0'\| = 1$. 另一方面,

$$T(x_0') = \lim T(x_\nu') = 0,$$

以致 $x_0' \in N$. 由于 $x_\nu' \in M$, 我们即有 $x_0' \in M$. 这蕴涵着 $x_0' = 0$,得到一个矛盾.

3.9.8 有限性定理 令 V 是一个有向 C^∞ 流形, ξ, η 是 V 上的 C^∞ 向量丛. 令 P 是一个从 ξ 到 η 的 $m(\geqslant 1)$ 阶的椭圆算子, K 是 V 的一个紧子集. 则映射

$$P_K: H_m(K, \xi) \to H_0(K, \eta)$$

的核是有限维的，并且，P_K 的像是闭的。

证明 令

$$i_m: H_m(K,\xi) \to H_{m-1}(K,\xi)$$

是自然的内射映射。令

$$\mathscr{H}_1 = H_m(K,\xi), \quad \mathscr{H}_2 = H_0(K,\eta) \oplus H_{m-1}(K,\xi).$$

令 $A_1, A_2: \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ 定义如下：

$$A_1(s) = P_K s \oplus i_m(s); \quad A_2(s) = 0 \oplus -i_m(s).$$

显然，A_1 是一个内射映射，A_2 是全连续的(引理 3.9.3)。此外，若 U 是 V 上的一个坐标邻域，$\varphi \in C_0^\infty(U)$，则从 (3.6.11) 我们得到，关于 K 的任一固定的覆盖 $\mathfrak{U}$，有

$$\begin{aligned}|\varphi s|_{m,\mathfrak{U}} &\leqslant \text{const} \cdot \{|P(\varphi s)|_{0,\mathfrak{U}} + |\varphi s|_{0,\mathfrak{U}}\} \\ &\leqslant \text{const} \cdot \{|\varphi P s|_{0,\mathfrak{U}} + |s|_{m-1,\mathfrak{U}}\}.\end{aligned}$$

这给出了

$$|s|_{m,\mathfrak{U}} \leqslant \text{const} \cdot \{|Ps|_{0,\mathfrak{U}} + |s|_{m-1,\mathfrak{U}}\}.$$

由此即得

$$\text{const} \cdot \|A_1(s)\|_{\mathscr{H}_2} \geqslant \|s\|_{\mathscr{H}_1}, \quad s \in \mathscr{H}_1,$$

因而 $A_1(\mathscr{H}_1)$ 是闭的。由命题 3.9.7，

$$\ker(A_1 + A_2) = \ker P_K$$

是有限维的，并且 $(A_1 + A_2)(\mathscr{H}_1) = P_K(H_m(K,\xi)) \oplus \{0\}$ 是闭的。命题得证。

3.9.9 命题 令 V 是一个有向 C^∞ 流形，ξ, η 是 V 上的向量丛，P 是一个从 ξ 到 η 的 m 阶椭圆算子。令 K 是 V 的一个紧子集。如果 $t_0 \in H_0(K,\eta)$，使得对于在 $\mathring{K}$ 上适合 $P't' = 0$ 的所有 $t' \in H_0(K, \eta')$，有 $\langle t', t_0\rangle_\eta = 0$，则存在 $s_0 \in H_m(K,\xi)$，满足 $Ps_0 = t_0$。

证明 令

$$\begin{aligned}N = \{t \in H_0(K,\eta) \mid \langle t', t\rangle_\eta = 0 \text{ 对于在 } \mathring{K} \text{ 上适合} \\ P't' = 0 \text{ 的所有 } t' \in H_0(K,\eta')\}.\end{aligned}$$

$\mathring{K}$ 上的方程 $P't' = 0$ 意味着对于所有 $s \in C_0^\infty(\mathring{K},\xi)$，有 $\langle Ps, t'\rangle_{\eta'} = 0$。令 l 是 $H_0(K,\eta)$ 上的一个连续线性泛函，它在 $P_K(H_m(K,\xi))$ 上等于 0。由于 $P_K(H_m(K,\xi))$ 是闭的，所以我们必须证明 $l(t_0)$

$= 0$. 我们知道(命题 3.9.4)，存在 $t_0' \in H_0(K, \eta')$，对于所有 $t \in H_0(K, \eta)$，有

$$l(t) = \langle t_0', t \rangle_\eta.$$

由于 l 在 $P_K(H_m(K, \xi))$ 上等于 0，因此对于所有 $s \in C_0^\infty(\mathring{K}, \xi)$，有

$$l(Ps) = \langle t_0', Ps \rangle_\eta = 0,$$

因而在 $\mathring{K}$ 上 $P't_0' = 0$. 由 N 的定义得

$$\langle t_0', t \rangle_\eta = l(t) = 0 \quad \text{对于 } t \in N,$$

这就证明了命题.

3.9.10 命题 如果除了命题 3.9.9 的条件之外，V 还是紧的，并且 $K = V$，则我们有

$$P_V(H_m(V, \xi)) = \{t \in H_0(V, \eta) | \langle t', t \rangle_\eta = 0$$
$$\text{对于适合 } P't' = 0 \text{ 的所有 } t' \in H_0(V, \eta')\}^{1)}.$$

证明 如果我们用 N 表示上面的等式右端的空间，则命题 3.9.9 蕴涵着

$$P_V(H_m(V, \xi)) \supset N.$$

另一方面，只要 $P't' = 0$，就有 $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$，因而 $N \supset P_V(H_m(V, \xi))$.

3.9.11 命题 令 V 是一个有向 C^∞ 紧流形，ξ，η 是 V 上两个 C^∞ 向量丛，并且 $\text{rank}(\xi) = \text{rank}(\eta)$. 令 P 是一个从 ξ 到 η 的椭圆算子，则 $C^\infty(V, \eta)/P(C^\infty(V, \xi))$ 是有限维的.

证明 考虑算子

$$P_V: H_m(V, \xi) \to H_0(V, \eta);$$

令 M 是它的像. 由命题 3.9.10，

$$M = \{t \in H_0(V, \eta) | \langle t', t \rangle_\eta = 0$$
$$\text{对于适合 } P't' = 0 \text{ 的所有 } t' \in H_0(V, \eta')\}.$$

因而，如果

$$P_V': H_m(V, \eta') \to H_0(V, \xi')$$

---

1) 原文将 $H_0(V, \eta)$ 仍写为 $H_0(K, \eta)$. ——译者注

是相应于从 η' 到 ξ' 的形式转置算子 P' 的算子，则

$$\text{cokernel } (P_V) \simeq \text{kernel}(P'_V)^{1)}.$$

由于 $\text{rank}(\xi) = \text{rank}(\eta)$，$P'$ 是椭圆的（注 3.3.22），因而由命题 3.9.8 知，cokernel (P_V) 是有限维的。

此外，由定理 3.9.1 得

$$M \cap C^\infty(V, \eta) = P(H_m(V, \xi)) \cap C^\infty(V, \eta)$$
$$= P(C^\infty(V, \xi)).$$

由于 M 在 $H_0(V, \eta)$ 中具有有限余维数，因而得到 $P(C^\infty(V, \xi))$ 在 $C^\infty(V, \eta)$ 中具有有限余维数。

本节的结果可以推广到不可定向流形。我们只需用所谓的"体积丛"代替 §3.3 中从 ξ' 的定义中的 $\mathscr{E}^n$。体积丛是用 $|g_{ij}|$ 代替转移函数 g_{ij}，由 $\mathscr{E}^n$ 而得到的丛。

并且，通过把正则性定理和关于 Fréchet 空间的闭图定理组合起来，可以简洁地证明命题 3.9.6。这种做法有下述好处：它可以适用于所有这样的线性微分算子，对于这些算子，正则性定理成立，但 Friedrichs 型的不等式不成立。

§ 3.10. 逼近定理及其对于开 Riemann 曲面的应用

在整个这一节中，我们将假设 V 是连通的。

3.10.1 记号 令 V 是一个具有可数基的 C^∞ 流形，并令 S 是 V 的一个子集。我们用 $\mathscr{I}(S)$ 表示 S 与 $V-S$ 的诸相对紧连通分支的并集。

我们将需要集合 $\mathscr{I}(S)$ 的某些性质。

3.10.2 命题 若 $S_1 \subset S_2$，则

$$\mathscr{I}(S_1) \subset \mathscr{I}(S_2);$$

并且，

1) cokernel (P_V) 是 P_V 的上核。——译者注

$$\mathscr{I}(\mathscr{I}(S)) = \mathscr{I}(S).$$

证明 若 C 是 $V-S_1$ 的一个相对紧连通分支，则 $C-S_2$ 是 $V-S_2$ 的连通分支的一个并集。为了证明这个事实，我们只需注意到，若 C' 是 $V-S_2$ 的一个连通分支，它不包含在 C 中，并且 $C\cap C'\neq\varnothing$，则 $C\cup C'$ 是 $V-S_1$ 的一个连通子集，它真包含 C，[1] 但这是不可能的，因为 C 是一个连通分支。因而 $C-S_2$ 是 $V-S_2$ 的连通分支的一个并集；因为 C 是相对紧的，这意味着 $C\subset\mathscr{I}(S_2)$.

3.10.3 命题 若 S 是闭的，则 $\mathscr{I}(S)$ 是闭的。若 K 是紧的，则 $\mathscr{I}(K)$ 是紧的.

证明 若 S 是闭的，则 $V-S$ 的任何分支是开的。由于 $V-\mathscr{I}(S)$ 是 $V-S$ 的非相对紧分支的并集，因而 $V-\mathscr{I}(S)$ 也是开的.

令 U 是包含 K 的一个相对紧开集。令 $U_1,\cdots,U_k$ 是覆盖 ∂U 的连通开集，$U_i\cap K=\varnothing$。显然，$V-K$ 的任何一个不包含在 U 中的连通分支必定至少包含诸 U_i 之一。因而，只存在有限多个 $V-K$ 的不包含在 U 中的相对紧分支，由此即得 $\mathscr{I}(K)$ 是相对紧的.

为了得到 $\mathscr{I}(S)$ 的下一个性质，我们需要：

3.10.4 命题 令 X 是一个局部紧 Hausdorff 拓扑空间，并令 K_0 是 X 的一个紧连通分支，则 K_0 有一个基本邻域组，这些邻域在 X 中既开又闭.

证明 如果必要的话我们用 K_0 的一个紧邻域代替 X，则我们不妨假设 X 是紧的.

令 $\mathscr{F}$ 是 K_0 的一个邻域族 $\{N\}$，这里 N 是任何既开又闭的集合.（因为 $X\in\mathscr{F}$，所以 $\mathscr{F}\neq\varnothing$）。令

$$K=\bigcap_{N\in\mathscr{F}} N.$$

显然，K 是闭的，因而是紧的。此外，在有限交运算下 $\mathscr{F}$ 是封闭的。因而 K 有一个基本邻域组，这些邻域都是 $\mathscr{F}$ 的元素。因此

---

1) 所谓集合 B 真包含集合 C，意味着 $B\supset C$，但是 $B\neq C$. ——译者注

我们只需证明 $K = K_0$ 即可．因为 $K_0 \subset K$，以及 K_0 是一个连通分支，因此只需证明 K 是连通的．

假设 K 不是连通的，则

$$K = A_0 \cup A_1,$$

其中 A_0，A_1 是 K 的闭子集（因而是紧的），$A_0 \cap A_1 = \varnothing$，$A_0$ 和 A_1 都不是空集．因为 A_0，A_1 是两个不相交的紧集，因而我们可以找到开集 U_0，U_1，满足 $A_j \subset U_j$，$U_0 \cap U_1 = \varnothing$．令 $U = U_0 \cup U_1$．因为

$$\bigcap_{N \in \mathscr{F}} (N \cap (X - U)) = \varnothing;$$

以及 $\mathscr{F}$ 在有限交运算下是封闭的，并因为 $X - U$ 是紧的，因而即得，存在一个 $N \in \mathscr{F}$，使得

$$N \cap (X - U) = \varnothing,$$

即，$N \subset U$．显然，K_0 或者包含在 U_0 中，或者包含在 U_1 中，譬如说 $K_0 \subset U_0$．但此时

$$N \cap U_0 = N \cap (X - U_1)$$

是既开又闭的，因而

$$K \subset N \cap U_0 \subset U_0,$$

这是一个矛盾，因为

$$K \cap U_1 \supset A_1 \neq \varnothing.$$

这就证明了命题．

3.10.5 命题 若 S 是 V 的一个开子集，则 $\mathscr{J}(S)$ 也是开的．

证明 令 K_0 是 $V - S$ 的一个相对紧分支．则 K_0 是紧的．令 N 是 K_0 的一个邻域，它在 $V - S$ 中是紧的和开的．则 $V - S - N$ 在 $V - S$ 中是闭的，因而在 V 中是闭的，以致 $S \cup N$ 在 V 中是开的．显然，$N \subset \mathscr{J}(S)$，由此即得 $\mathscr{J}(S)$ 是开的．

3.10.6 命题 令 K 是一个紧集，并令 $K = \mathscr{J}(K)$，则 K 有一个基本开(或紧)邻域组 $\{S\}$，其中 S 适合 $S = \mathscr{J}(S)$.

证明 我们不妨假设 V 是连通的．容易证明，K 有一个基本开邻域组 $\{U\}$，这里，$V - U$ 只有有限多个连通分支．令 $U' =$

$\mathscr{J}(U)$，并令 C_0 是 $V-U$ 的一个紧分支．则 $C_0 \subset V-K$，因而 $C_0 \subset U_0$，其中 U_0 是 $V-K$ 的一个(开)连通分支．因为 $K=\mathscr{J}(K)$，因此 U_0 不是相对紧的，以致 $\partial U' \cap U_0 \neq \varnothing$．令 γ_0 是连结 C_0 的一个点与 $\partial U'$ 的一个点的一段简单弧，它包含在 U_0 中．对于 $V-U$ 的每个紧分支 C_j，我们构作一条这样的曲线 γ_j．显然，如果

$$S = U - \bigcup_j \gamma_j,$$

则 S 是开的，并且我们有 $S=\mathscr{J}(S)$．

若 S 是 K 的一个开邻域，满足 $S=\mathscr{J}(S)$，L 是 K 的一个紧邻域，满足 $L \subset S$，则由命题 3.10.2，$L'=\mathscr{J}(L) \subset S$，并且由命题 3.10.3，$L'$ 是 K 的一个紧邻域．这就证明了命题．

3.10.7 Malgrange-Lax **逼近定理** 令 V 是一个有向实解析流形，ξ, η 是 V 上的实解析向量丛，满足 $\operatorname{rank}(\xi)=\operatorname{rank}(\eta)$．令 P 是一个从 ξ 到 η 的具有解析系数的 m 阶椭圆算子．令 U 是 V 的一个开子集，使得 $V-U$ 没有紧连通分支，则任何在 U 上满足 $Pu=0$ 的 $u \in C^\infty(U, \xi)$，与其所有偏导数，是在 V 上满足 $Pu_\nu=0$ 的截面序列 $\{u_\nu\} \subset C^\infty(V, \xi)$ 在 U 的任何紧子集上的一致极限．

证明 令 K 是 U 中的一个紧集．通过用 $\mathscr{J}(K)$ 代替 K，我们可以假设 $K=\mathscr{J}(K)$；注意，由命题 3.10.2，3，$\mathscr{J}(K)$ 是紧的，并且 $\mathscr{J}(K) \subset U$．

令 L 是 V 中的一个紧集，使得 $K \subset \mathring{L}$，并令

$$\mathscr{P}(L) = \{s \in H_0(L, \xi) \mid Ps=0 \text{ 在 } \mathring{L} \text{ 上}\},$$

并令 $\mathscr{S}(K)$ 是在 N 上满足 $Ps=0$ 的截面族 $\{s\} \subset C^\infty(N, \xi)$ 在 $H_0(K, \xi)$ 上的限制，其中 N 是 K 的一个邻域，它可以依赖于 s．令

$$\rho: \mathscr{P}(L) \to H_0(K, \xi)$$

是映射

$$\rho(s)(x) = \begin{cases} s(x) & \text{若 } x \in K, \\ 0 & \text{若 } x \notin K, \end{cases}$$

并令 $M=\rho(\mathscr{P}(L))$．显然，$M \subset \mathscr{S}(K)$．我们首先证明：

3.10.8 定理 M 在 $\mathscr{S}(K)$ 中是稠的．

证明 令 l 是 $H_0(K,\xi)$ 上的一个连续线性泛函，满足 $l|M=0$. 我们必须证明 $l|\mathscr{S}(K)=0$. 然而，由命题 3.9.4，存在一个 $s_0'\in H_0(K,\xi')$，使得

$$l(s)=\langle s_0', s\rangle_\xi,\quad s\in H_0(K,\xi).$$

我们用

$$s'(x)=\begin{cases} s_0'(x) & x\in K,\\ 0 & x\notin K\end{cases}$$

定义 $s'\in H_0(L,\xi')$. 我们断言，若 $u\in H_0(L,\xi)$，并且

$$Pu=0 \text{ 在 } \mathring{L} \text{ 上},$$

则

$$\langle s', u\rangle_\xi=0.$$

事实上，因为 $l|M=0$，所以

$$\langle s',u\rangle_\xi=\langle s_0', \rho(u)\rangle_\xi=l(\rho(u))=0.$$

因而，由命题 3.9.9 知，存在 $t'\in H_m(L,\eta')$，使得 $P't'=s'$. 然而当 $x\notin K$ 时 $s'(x)=0$，因而在 $V-K$ 上 $P't'=0$. 因为 P' 是一个具有解析系数的椭圆算子（注 3.3.22），因而从定理 3.9.2 即得 t' 在 $V-K$ 上是解析的. 但是当 $x\notin L$ 时 $t'(x)=0$. 此外，由于 $K=\mathscr{J}(K)$，所以 $V-K$ 的连通分支都不包含在 L 中. 因而 t' 在 $V-K$ 的任何连通分支的某个非空开子集上为 0，并且，由于 t' 在 $V-K$ 上是解析的，所以对于任何 $x\in V-K$，有 $t'(x)=0$.

若 $s\in\mathscr{S}(K)$，而 N 是 K 的一个邻域，s 在 N 中有意义，并且在 N 中 $Ps=0$，则我们有

$$l(s)=\langle s_0', s\rangle_\xi=\langle P't', s\rangle_\xi=\int_N B(P't',s)$$

$$(\text{因为在} N-K \text{上}\ P't'=0)=\int_N B(t', Ps)$$

（因为 supp (t') 在 N 中是紧的），并且，因为 $Ps=0$，所以上式等于 0. 这样，$l|\mathscr{S}(K)=0$，因而定理得证.

这样，由定理 3.9.1 知，存在一个序列 $u_\nu\in C^\infty(\mathring{L},\xi)$，$Pu_\nu=0$，使得在 $H_0(K,\xi)$ 中 $u_\nu\to u$.（由命题 3.9.6，u_ν，和所有偏导数一

起，在 $\mathring{K}$ 上一致收敛于 u 及其相应的偏导数.）

令 $\{K_\nu\}$ 是 V 的一个紧子集序列，满足

$$K \subset \mathring{K}_1, \quad K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}, \quad K_\nu = \mathscr{J}(K_\nu).$$

（容易知道这样的一个序列是存在的.）若 $\varepsilon > 0$ 是给定的正数，$s \in \mathscr{S}(K)$，则从定理 3.10.8 我们得到序列

$$s_\nu \in C^\infty(\mathring{K}_{\nu+1}, \xi)$$

的存在性，它们满足

$$Ps_\nu = 0, \quad |s_1 - s|^K < \varepsilon/2, \quad |s_{\nu+1} - s_\nu|^{K_\nu} < \varepsilon/2^\nu;$$

这里，$|\cdots|^{K_\nu}$ 表示定义 $H_0(K_\nu, \xi)$ 的拓扑的一个范数，对于 $s \in H_0(K_{\nu+1}, \xi)$，有 $|s|^{K_\nu} \leqslant |s|^{K_{\nu+1}}$. 此时，级数

$$u = s_\nu + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (s_\mu - s_{\mu-1})$$

在 $H_0(K_\nu, \xi)$ 中收敛，其和不依赖于 ν. 并且，由命题 3.9.6 知，$u \in C^\infty(V, \xi)$，并且 $Pu = 0$. 显然，$|u - s|^K < \varepsilon$. 这样，存在一个序列 $\{u_N\} \subset C^\infty(V, \xi)$，它在 $H_0(K, \xi)$ 中收敛于 s，并且 $Pu_N = 0$. 因而从命题 3.9.6 即得本定理.

从上面的定理和命题 3.10.6 直接得到：

3.10.9 推论 令 K 是 V 的一个紧子集，$K = \mathscr{J}(K)$. 我们用定理 3.10.8 的记号；若 u 是 K 的某个邻域中方程 $Pu = 0$ 的一个解，则与所有导数一起，u 可用 V 上的方程 $Ps = 0$ 的解逼近，此逼近在 K 上是一致的.

3.10.10 注 可以证明，为了逼近定理的成立，定理 3.10.8 中的条件 $U = \mathscr{J}(U)$ 也是必要的. 然而，其证明要用到我们不曾讨论过的关于方程 $Pu = f$ 的存在性理论. 可参阅 Malgrange [1955/56].

现在令 V 是一个 n 维复流形，$\mathscr{E}^{p,q}$ 是 V 上 (p, q) 型的形式丛. 在例 3.3.15,(b) 中我们已经注意到，从 $\mathscr{E}^{p,0}$ 到 $\mathscr{E}^{p,1}$ 的微分算子 $\bar{\partial}$ 是椭圆的；特别，从 ϑ_1 到 $\mathscr{E}^{0,1}$ 的微分算子 $\bar{\partial}$ 是椭圆的. 然而，$\operatorname{rank}(\vartheta_1) = 1$，$\operatorname{rank}(\mathscr{E}^{0,1}) = n$. 因而，若 $n = 1$，则我们可以应用定理 3.10.8，从而得到下述定理：

3.10.11　关于开 Riemann 曲面的 Runge 定理： Behnke-Stein．令 V 是一个具有可数基的复维数为 1 的连通复流形，即，V 是一个开 Riemann 曲面．令 U 是 V 的一个开子集，使得 $V-U$ 没有紧连通分支，则 U 上的任何全纯函数是 V 上的全纯函数族的极限，在 U 的每个紧子集上，此极限是一致的．

这个定理——它有很多推论——的应用之一是下面的定理 3.10.13．特别，定理 3.10.13 证明了 Carathéodory 的猜想，即，任何一个开 Riemann 曲面上存在着非常数的全纯函数．

3.10.12　定义　令 V 是一个 n 维复流形，$\mathscr{H}=\mathscr{H}(V)$ 是 V 上的全纯函数环．V 称为一个 Stein 流形，如果下面三个条件被满足：

(a) $\mathscr{H}$ 分离 V 的点，即，若 $a, b\in V$，$a\neq b$，则存在 $f\in\mathscr{H}$，使得 $f(a)\neq f(b)$．

(b) 若 $a\in V$，则存在 $f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$，使得由 $f_1,\cdots,f_n$ 所定义的映射 $f: V\to \boldsymbol{C}^n$ 是一个从 a 的一个邻域到 $\boldsymbol{C}^n$ 中一个开集上的同构映射，即，$f_1,\cdots,f_n$ 给出 a 的一个邻域中的局部坐标．

(c) 对于任一紧集 $K\subset V$，集合

$$\hat{K}=\hat{K}_{\mathscr{H}}=\{x\in V \mid |f(x)|\leqslant \sup_{y\in K}|f(y)| \text{ 对于所有 } f\in\mathscr{H}\}$$

是紧的．

3.10.13　定理　(Behnke-Stein) 每个开 Riemann 曲面是一个 Stein 流形．

证明　令 V 是给定的开 Riemann 曲面，令 $a, a'\in V$．令 (U,φ)，(U',φ') 是两个坐标系，满足 $U\cap U'=\varnothing$，

$$\varphi(U)=\{z\in\boldsymbol{C} \mid |z|<1\}=\varphi'(U')$$

以及

$$\varphi(a)=\varphi'(a')=0.$$

若

$$D=\{x\in U \mid |\varphi(x)|<r<1\},$$

$$D'=\{x'\in U' \mid |\varphi'(x')|<r<1\},$$

则我们立即看到 $V-D$，$V-D'$ 和 $V-D-D'$ 是连通的．因

而，若 $\Omega = D \cup D'$，则$V - \Omega$没有紧连通分支．由定理 3.10.11 知，由

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in D, \\ 1 & x \in D' \end{cases}$$

所定义的Ω上的函数u可以被元素$f \in \mathscr{H}$所逼近，此逼近在$K' = \{a\} \cup \{a'\}$上是一致的．特别，存在$f \in \mathscr{H}$，满足$|f(a)| < \frac{1}{2}$，$|f(a')| > \frac{1}{2}$．因而$\mathscr{H}$分离V的点．

若$a \in V$，(U, φ)是如上所述的一个坐标邻域，并且$D = \{x \in U \mid |\varphi(x)| < r < 1\}$，$K = \{x \in U \mid |\varphi(x)| \leqslant r' < r\}$，则$V - D$是连通的．再一次由定理 3.10.8 得，存在$f \in \mathscr{H}$，满足

$$\sup_{y \in K} |f(y) - \varphi(y)| < \varepsilon,$$

若ε充分小，则$(df)(a) \neq 0$，因而f是a的邻域中的一个局部同胚，这证明了f给出了a处的局部坐标．至于定义 3.10.12 中的(c)，我们将证明

$$\hat{K}_{\mathscr{H}} = \mathscr{J}(K).$$

首先，若U是$V - K$的一个相对紧连通分支，则我们有$\partial U \subset K$．因而，从极大值原理即得$U \subset \hat{K}_{\mathscr{H}}$，因此

$$\mathscr{J}(K) \subset \hat{K}_{\mathscr{H}}.$$

现令$a \notin \mathscr{J}(K)$，并令$L = \{a\} \cup \mathscr{J}(K)$．我们容易得到$L = \mathscr{J}(L)$．因而，由应用于从$\vartheta_1$到$\mathscr{E}^{0,1}$的算子$\bar{\partial}$的推论 3.10.9 知，存在$f \in \mathscr{H}$，满足

$$\sup_{y \in L} |f(y) - u(y)| < \frac{1}{2},$$

其中

$$u(y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } y \text{ 在 } a \text{ 的一个邻域中，} \\ 0 & \text{若 } y \text{ 在 } \mathscr{J}(K) \text{ 的一个邻域中．} \end{cases}$$

则

$$|f(a)| > \sup_{y \in K} |f(y)|,$$

以致 $a\notin\hat{K}_{\mathscr{F}}$. 因而

$$\hat{K}_{\mathscr{F}}\subset\mathscr{J}(K),$$

定理证毕.

本节的主要定理 3.10.8 属于 Malgrange [1955/56] 和 Lax [1956]. 它关于开 Riemann 曲面的应用出自 Malgrange [1955/56]. Behnke-Stein [1948]原来的处理方法是完全不同的. Behnke-Stein 的方法比较难，并且较细致地用到紧 Riemann 曲面的理论，然而，此方法有这样的好处，即，它同时给出了所谓"Cousin 第一问题和第二问题"的解(Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 的定理). 实际上，利用 Behnke-Stein 定理对于一个全纯向量丛的截面的推广(这个结果容易从 Malgrange-Lax 定理直接得到)，可以比较简单地解决 Cousin 第一问题.

参 考 文 献

Abraham, R., 1963, *Transversality in manifolds of mappings*, Bull. Am. Math. Soc. **69**, 470—474.

Atiyah, M. F., 1962, *Immersions and imbeddings of manifolds*, Topology **1**, 125—132.

Behnke, H. and K. Stein, 1948, *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen*, Math. Annalen **120**, 430—461.

* Bourbaki, N., 1952, algébre, Ch. VII, *Modules sur les anneaux principaux*, Hermann, Paris.

* Bourbaki, N., 1965, *Topologie générale*, Ch. I, *Structures topologiques*, 4e *édition*, Hermann, Paris.

* Bourbaki, N., 1958, *Topologie générale*, Ch. IX, *Utilisation des nombres reéls en topologie générale*, Hermann, Paris.

Bishop, E., 1961, *Mappings of partially analytic spaces*, Am. J. Math. **83**, 209—242.

* Cartan, E., 1958, *Leçons sur les invariants integraux*, Hermann, Paris.

Cartan, H., 1957, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. de France **85**, 77—99.

Cartan, H., 1961/62, *Séminaire E. N. S.: Topologie différentielle.*

Chevalley, C., 1944, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press.

Dieudonné, J., 1944, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pure Appl. **23**, 65—76.

Friedrichs K. O., 1953, *On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **6**, 299—325.

Fuchs, W. H. J., 1964, *On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band limited signals*, J. Math. Analysis Applications **9**, 317—330.

Gårding, L., 1953, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scandinavica **1**, 55—72.

Glaeser, G., 1958, *Etudes de quelques algèbres Tayloriennes*, Jour d'Analyse (Jerusalem) **6**, 1—124.

Grauert, H., 1958, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Annals Math. **68**, 460—472.

Haefliger, A., 1961, *Plongements differentiables de variètès dans variètès*, Commentarii Math. Helvetici 36, 47—82.

* Herve, M., 1963, *Several Complex Variables*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay and Oxford Univ. Press.

Hirsch, M. W., 1961, *On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space*, Annals Math. 73, 566—571.

Hopf, H., 1948, *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*, Studies and Essays presented to R. Courant (Interscience N. Y.), 167—185.

* Hörmander, L., 1963, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin.

Hörmander, L., 1964, *The Frobenius Nirenberg theorem*, Arkiv för Mathematik 5, 425—432.

Hörmander, L., 1965, *Pseudo differential operators*, Commun. Pure Appl. Math. 18, 501—517.

* Hörmander, L., 1966, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton.

* Hurewicz, W., and H. Wallman, 1948, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press.

John, F., 1955, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience N. Y.

Kervaire, M., 1960, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Commentarii Math. Helvetici 34, 257—270.

Kodaira, K. and D. C. Spencer, 1958, *On deformations of complex analytic structures, Part I and II*, Annals Math. 67, 328—466.

Kohn, J. J., 1963, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I*, Annals Math. 78, 206—213.

* Koszul, J. L., 1960, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

Kotakè, T. and M. S. Narasimhan, 1962, *Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator*, Bull. Soc. Math. France 90, 449—471.

Lax, P., 1955, *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations*, Commun. Pure Appl. Math. 8, 615—633.

Lax, P., 1956, *A stability theorem for abstract differential equations and its application to the study of the local behaviour of solutions of elliptic equations*, Commun. Pure Appl. Math. 9, 747—766.

Malgrange, B., 1955/56, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier 6, 271—355.

* Malgrange, B., 1966, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay and Oxford Univ. Press.

Malgrange, B., 1969, *Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes*, Symposia Mathematica, Istituto di Alta Matematica, Academic Press, London and New York, pp. 289—296.

Milnor, J., 1956, *On manifolds which are homeomorphic to the 7-sphere*, Annals Math. 64, 399—405.

Morrey, C. B. and L. Nirenberg, 1957, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. 10, 271—290.

Morse, A. P., 1939, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals Math. 40, 62—70.

Narasimhan, R., 1960, *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*, Am. J. Math. 82, 917—934.

Newlander, A., and L. Nirenberg, *Complex analytic co-ordinates in almost complex manifolds*, Annals Math. **65**, 391—404.

Nirenberg, L., 1955, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **8**, 648—674.

Nirenberg, L., 1970, *Pseudo-differential operators*, Amer. Math. Soc. Symposium on Pure Math. Vol. XVI, Providence R. I. pp. 149—167.

* Nomizu, K., 1956, *Lie groups and differential geometry*, Publications of the math. Society of Japan.

Oka, K., 1936, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles*, J. Science, Hiroshima Univ. **6**, 245—255.

Papy, G., 1956, *Sur la dèfinition intrinsèque des vecteurs tangents à une varieté de classe C lorsque* $1 \leq r < \infty$, C. R. Acad. Sci. Paris **242**, 1573—1575.

Peetre, J., 1960, *Rectifications a l'article "Une cáracterisation abstraite des opérateurs différentiels"*, Math. Scandinavica **8**, 116—120.

Petrovsky, I. G., 1939, *Sur l'analyticité des systemes d'equations différentielles*, Math. Sbornik **5**, 3—68.

Rellich, F., 1930, *Ein Satz über mittlere Konvergenz*, Göttinger Nachrichten, 30—35.

Sard, A., 1942, *The measure of critical values of differentiable maps*, Bull. Am. Math. Soc. **45**, 883—890.

Schwartz, J., 1954, *The formula for change in variables in a multiple integral*, Am. Math. Monthly **61**, 81—85.

Schwartz, L., 1950/51, *Théorie des distributions*, Vol. 1 and 2, Hermann, Paris.

Schwartz, L., 1963/64, *Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété*, Séminaire Bourbaki, 1963/64, Exposé 269.

Serre, J. P., 1953/54, *Exposé 18 in Séminaire H. Cartan.*

Sobolev, S. L., 1938, *Sur un théoréme d'analyse fonctionelle*, Math. Sbornik **4**, 471—496.

Thom, R., 1956, *Un lemme sur les applications différentiables*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 59—71.

Wall, C. T. C., 1965, *All 3-manifolds imbed in 5-space*, Bull. Am. Math. Soc. **71**, 564—567.

Weil, A., 1952, *Sur les théoremes de deRham*, Commentarii Math. Helvetici **26**, 119—145.

Weyl, H., 1916, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Annalen **77**, 313—352.

Whitney, H., 1934, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Am. Math. Soc. **36**, 63—89.

Whitney, H., 1935, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. **1**, 514—517.

Whitney, H., 1936, *Differentiable manifolds*, Annals Math. **37**, 645—680.

Whitney, H., 1944a, *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n space*, Annals Math. **45**, 220—246.
Whitney, H., 1944b, *The singularities of a smooth n-manifold in* (2*n*—1)-*space*, Annals Math. **45**, 247—293.
* Whitney, H., 1957, *Geometric integration theory*, Princeton Univ. Press.

注：以上加星号的是参考书。

索　　引

一　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 五 画